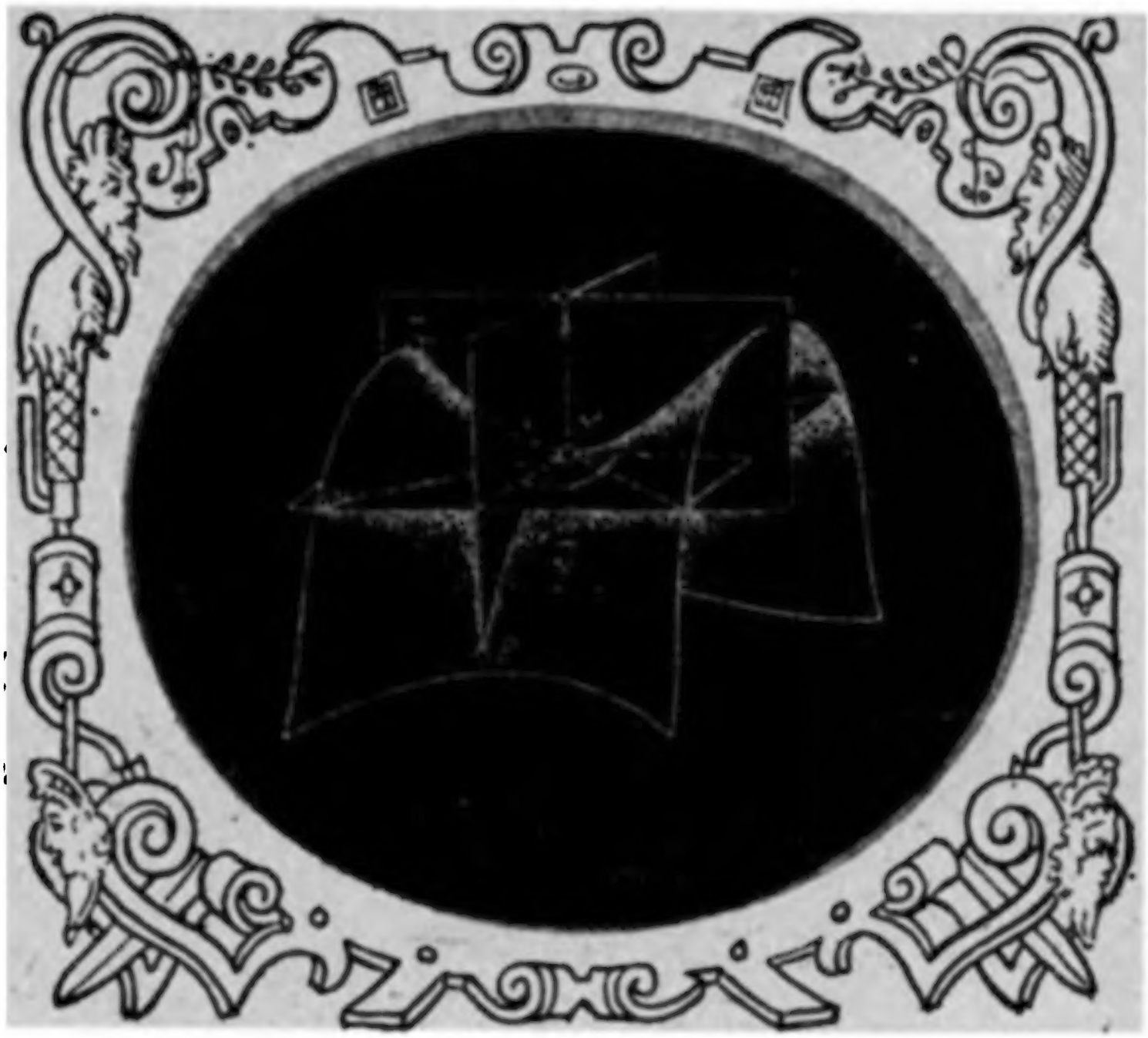
Г. И. Глейзер

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ

IX–X классы

Г. И. Глейзер

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ



ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ НА УРОКАХ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ НА ВНЕКЛАССНЫХ ЗАНЯТИЯХ

Г. И. Глейзер

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ

IX-X классы

Пособие для учителей

Москва «Просвещение»
1983

ББК 22.1г
Г53

Рекомендовано Главным управлением школ Министерства просвещения СССР

Глейзер Г. И.

Г53 История математики в школе: IX—X кл. Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1983. — 351 с., ил.

В книге в виде коротких статей содержится материал по истории математики, доступный учащимся IX—X классов.

Материал 1-й части предназначен для занятий на уроках, а 2-ю часть можно использовать на внеклассных занятиях.

В пособии дан набор задач по алгебре и началам анализа и геометрии известных математиков прошлых веков. Книга иллюстрирована.

$\Gamma \frac{4306010400-431}{103(03)-83}$ 54—83

ББК 22.1г
51(09)

© Издательство «Просвещение», 1983 г.

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Книга «История математики в школе» для IX—X классов является продолжением первых двух книг для IV—VI и VII—VIII классов, изданных в 1981 и 1982 годах. Первая часть книги содержит материал по истории математики, соответствующий программе IX и X классов, а вторая часть предназначена для внеклассных занятий с учениками или для самостоятельного чтения учеников, увлекающихся математикой и ее историей. В конце книги помещены исторические задачи с указаниями к их решению и ответами. Эту книгу от предшествующих отличает не только содержание, но и более строгое изложение материала, что обусловлено возрастными особенностями и развитием учащихся старших классов.

В отдельных статьях для внеклассных занятий имеются некоторые сведения теоретического характера, которые в программе средней школы отсутствуют, например: непрерывные дроби, комплексные числа, вопросы теории вероятностей и др. Однако этот материал может быть использован для уроков в математической школе или в техникуме.

Хронологический справочник «Века и годы», содержащий материал по истории математики, относится ко всем трем книгам, для удобства читателя помещен в первой книге (IV—VI классы).

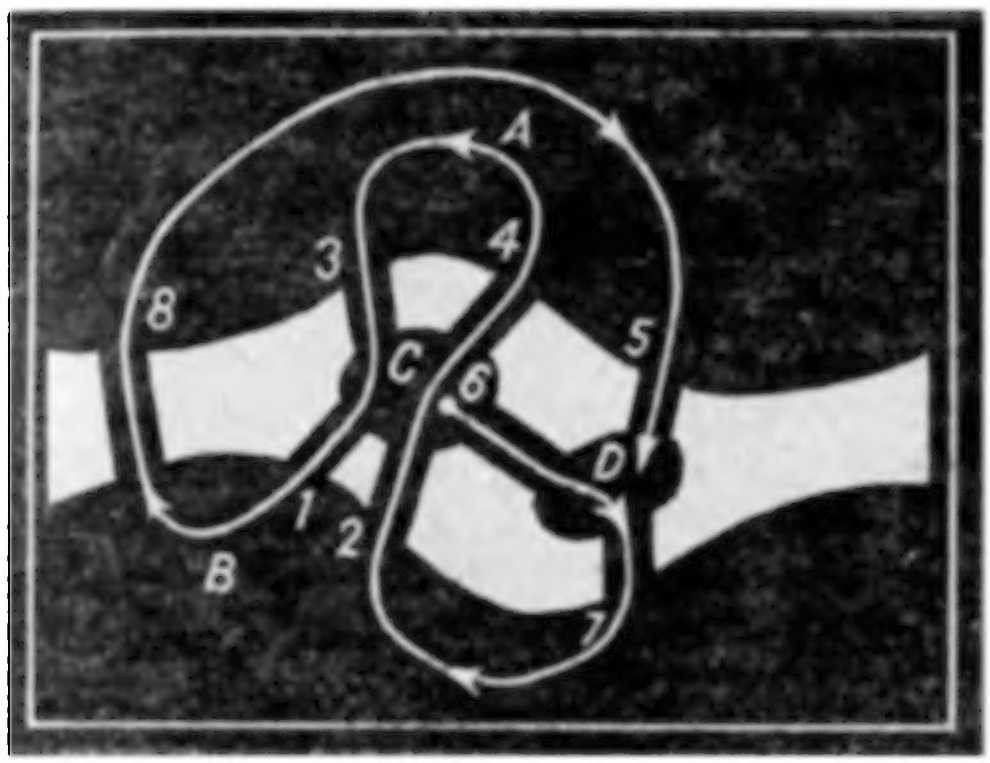
Весь материал пособия при подготовке

издания в печать был уточнен, дополнен и перераспределен в соответствии с требованиями современной программы по математике для средней школы А. А. Свечникову м, который продолжительное время работал с автором и был посвящен в его замыслы.

Им же переработаны, дополнены и частично написаны вновь следующие статьи настоящего пособия: § 1, пункты 1, 4; § 3, пункт 22; § 8, пункты 52 и 53; § 9, пункт 54.

Издательство выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору, действительному члену Международной Академии истории науки Б. А. Розенфельду за существенное усовершенствование работы Г. И. Глейзера при ее подготовке в печать.

I



ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ НА УРОКАХ

✦

Математика — это то, посредством чего люди управляют природой и собой.

А. Н. Колмогоров

Кто хочет ограничиться настоящим, без знания прошлого, тот никогда его не поймет...

Г. В. Лейбниц

9 класс

Глава I.

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

§ 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

Знание людей заслуживает имени Науки в зависимости от того, какую роль играет в нем число.

Э. Борель

1. Краткий обзор развития понятия числа

На первых этапах существования человеческого общества числа, открытые в процессе практической деятельности, служили для примитивного счета предметов, дней, шагов и т. п. В первобытном обществе человек нуждался лишь в нескольких первых числах. Но с развитием цивилизации ему потребовалось изобретать все бóльшие и большие числа. Этот процесс продолжался на протяжении многих столетий и потребовал напряженного интеллектуального труда.

С зарождением обмена продуктами труда у людей появилась необходимость сравнивать число предметов одного вида с числом предметов другого вида. На этом этапе возникли понятия «больше», «меньше», «столько же» или «равно». Вероятно, на этом же этапе развития люди стали складывать числа. Значительно позже они научились вычитать числа, затем умножать и делить их. Даже в средние века деление чисел считалось очень сложным и служило признаком чрезвычайно высокой образованности человека.

С открытием действий с числами или операций над ними возникла наука арифметика. Ее возникновению и развитию способствовали практические потребности — строительство разнообразных сооружений, торговля, мореходство и пр. Долгое время в арифметике имели дело с числами относительно небольшими. Например, в системе счисления Древней Греции самым большим числом, которое имело название, была «мириада» — 10 000. Еще в III в. до н. э. люди не знали, что натуральный ряд чисел бесконечен. Вот тогда-то Архимед в своем трактате «Исчисление песчинок» — «Псаммит» разработал систему, которая позволяла выразить сколь угодно большое число, и показал, что натуральный ряд чисел был бесконечен. Следует заметить, что первое представление о потенциально бесконечно малом и бесконечно большом дал Анаксагор (ок. 500—428 гг. до н. э.). Древнегреческий философ Аристотель (384—322 гг. до н. э.) в своих высказываниях, допуская бесконеч-

ность математического пространства, считал математическую прямую бесконечной. Аналогичных принципов придерживался и Евклид (подробнее об идее бесконечности см. гл. I; 3 и гл. III; 43).

Математики Древней Греции, занявшись проблемами больших чисел, совершили скачок от конечного к бесконечному. Смелая идея бесконечности, которая шла вразрез с философскими воззрениями о конечности Вселенной, открыла в математике широкие возможности, хотя и вызвала значительные противоречия, некоторые из них не раскрыты и по сей день.

В IV в. до н. э. греческие математики из школы Пифагора открыли несоизмеримые отрезки, длины которых они не могли выразить ни целым, ни дробным числом. Одним из таких отрезков была диагональ квадрата со сторонами, равными единице. Теперь длину такого отрезка мы выражаем через $\sqrt{2}$. Ученые того времени относили к числам только рациональные и не признавали иррациональные числа. Они нашли выход в том, что под числами стали понимать длины отрезков прямых.

Геометрическое выражение чисел на первых этапах сыграло положительную роль в дальнейшем продвижении математики, но затем вызвало ряд затруднений и стало тормозом в прогрессе арифметики и алгебры.

Потребовалась не одна сотня лет для того, чтобы математики смогли осмыслить понятие иррационального числа и выработать способ записи такого числа и приближенного значения его в виде бесконечной десятичной дроби.

Как видно, понятие числа прошло длинный путь развития: сначала целые числа, затем дробные, рациональные (положительные и отрицательные) и, наконец, действительные. (Любое число, которое можно выразить в виде конечной или бесконечной десятичной дроби, представляет собой элемент множества действительных чисел.)

Но на этом развитие не завершилось. В связи с решением уравнений математики встретились с числом, которое выражалось $\sqrt{-1}$. Оно получило название м н и м о й е д и н и ц ы. Долгое время мнимые числа не признавали за числа. После того как норвежский математик Гаспар Вессель (1745—1818) нашел возможность представить мнимое число геометрически, то так называемые «мнимые числа» получили свое место в множестве комплексных чисел. Однако и раньше интерпретация этих чисел имелась у Даламбера и Эйлера, которые ставили в соответствие комплексным числам точки плоскости и некоторые функции комплексного переменного истолковывали геометрически.

Обозначение комплексного числа $a + b\sqrt{-1}$ принадлежит Кардано. Эйлер стал записывать это число в виде $a + bi$, где $i = \sqrt{-1}$, а $i^2 = -1$. По рекомендации ирландского математика Уильяма Роуэна Гамильтона (1805—1865) комплексные числа стали выражать парой действительных чисел в виде (a, b). Однако и на этом

развитие понятия числа не завершилось. Оно продолжает свой путь дальше (подробнее о комплексных числах см. § 14).

2. Аксиомы натуральных чисел

Как известно, аксиоматическое построение любой математической теории начинается с перечисления неопределяемых, *основных понятий* (объектов и отношений) и аксиом, которым должны удовлетворять основные понятия. Вошедшая во всеобщее употребление система аксиом натуральных чисел была предложена итальянским математиком и логиком, профессором Туринского университета Джузеппе Пеано в статье «О понятии числа», опубликованной в 1891 г. Вот как формулировал Пеано свои пять аксиом:

1. 0 есть натуральное число.
2. Следующее за натуральным числом есть натуральное число.
3. 0 не следует ни за каким натуральным числом.
4. Всякое натуральное число следует только за одним натуральным числом.
5. Аксиома полной индукции.

Итак, с аксиоматической точки зрения мы имеем дело с двумя основными понятиями: «натуральные числа» (объект) и «непосредственно следует за» (соотношение). Эти понятия косвенно определяются системой аксиом.

Излагаемая в настоящее время в учебных руководствах[1] система аксиом натуральных чисел лишь по форме несколько отличается от вышеприведенной. Натуральные числа — это элементы всякого непустого множества N, в котором для некоторых элементов a и b установлено отношение «b следует за a» (число, следующее за a, обозначается a^*), удовлетворяющее следующим *четырем аксиомам*:

1. Существует натуральное число 1, непосредственно не следующее ни за каким натуральным числом, т. е. для любого a имеем: $a^* \neq 1$.
2. Для каждого натурального числа a существует одно и только одно непосредственно за ним следующее натуральное число a^*, т. е.

$$a = b \rightarrow a^* = b^*.$$

3. Любое натуральное число, кроме 1, непосредственно следует за одним и только одним натуральным числом, т. е. если $a \neq 1$, то из $a^* = b^* \rightarrow a = b$.
4. Аксиома индукции. Пусть M — подмножество множества N натуральных чисел, обладающее свойствами: а) 1 принадлежит M, б) если натуральное число a принадлежит M, то a^* также принад-

---

[1] См., например: 1) Арнольд И. В. Теоретическая арифметика. М., 1939; 2) Проскуряков И. В. Числа и многочлены. 2-е изд. М., 1965.

лежит M; тогда множество M содержит все натуральные числа, т е. M совпадает с N.

То, что в первоначальной формулировке (Пеано) первый элемент есть 0, а не 1, не имеет принципиального значения. Дело в том, что в настоящее время нуль причисляется не к натуральным, а к целым числам. Символы 1, 2, 3, ..., которыми обычно обозначают натуральные числа, были выработаны, как мы уже знаем, на протяжении веков. На основе аксиом 1—4 можно определить арифметические действия и построить всю арифметику натуральных чисел чисто дедуктивным путем. В частности, на основе аксиомы 4 доказывается следующее п р е д л о ж е н и е: *если некоторая теорема T, в формулировку которой входит натуральное число n, верна для $n = 1$ и в предположении, что она верна для n, будет верна и для $n + 1$, то T верна для любого натурального числа.* Это предложение, эквивалентное аксиоме 4, называют *принципом математической индукции.* На этом принципе и основан метод математической индукции, с помощью которого доказывают многие теоремы арифметики, алгебры, теории чисел и геометрии. Под *индукцией* (от латинского *inductio* — наведение) понимают в логике одну из форм умозаключений, состоящую в выведении общего суждения относительно бесконечного множества объектов на основании изучения некоторого конечного числа частных случаев.

3. Возникновение и применение идеи бесконечности в древнегреческой математике

Идея бесконечности возникла еще в глубокой древности в связи с представлениями о Вселенной. В философии под бесконечностью понимают отсутствие начала и конца во времени и в пространстве. Конечное и бесконечное — это с точки зрения марксистской философии две категории, т. е. два основных понятия, выражающие неразрывно связанные между собой противоположные стороны объективного мира. Вселенная, природа бесконечны. Бесконечная движущаяся магерия существует в виде бесконечного многообразия взаимосвязанных конечных вещей. С понятием бесконечности в философии связано и математическое понятие бесконечности как одной из математических абстракций. Оно встречается уже на первых ступенях изучения арифметики, а именно когда речь идет о натуральном ряде чисел: 1, 2, 3, 4, ... В геометрии мы сталкиваемся с понятием бесконечности, когда прямая мыслится как бесконечная прямая и т. п.

Как известно, математика превратилась в дедуктивную науку в Древней Греции, где ее развитие протекало в сотрудничестве с философией. Уже в VI в. до н. э. греческие философы разрабатывали проблему бесконечности и связанную с ней проблему непрерывного и дискретного. Этими проблемами занимались представители милетской школы Анаксимандр (около 610—546 гг. до н. э.) в своем произведении «Апейрон» («Беспредельное»), Анаксимен (около

588—? гг. до н. э.) в сочинении «О природе». Такое же заглавие выбрал для одного из своих сочинений Анаксагор (около 500—428 гг. до н. э.), в котором он понятие бесконечности положил в основу своего мировоззрения. Анаксагор писал: «Среди малых величин не существует наименьшей, но уменьшение идет непрерывно». Эту мысль он дополнил, написав, что «всегда имеется нечто большее, чем то, что большое». Вот почему историки математики считают, что Анаксагор впервые ввел в математику понятие потенциально бесконечно малого и бесконечно большого, а это оказалось весьма существенным для дальнейшего развития математики[1]. Но если Анаксагор и другие математики приписывали пространству только непрерывные свойства, то другие ученые создали представление о пространстве как о множестве точек, являющихся неделимыми элементами. Последняя концепция отвечала, в частности, духу школы Пифагора, в которой развивалось учение о дискретных (т. е. прерывных) объектах, а именно о числах. Пифагорейцы долгое время считали возможным распространить свое учение о целочисленной основе всего существующего и на геометрические величины. Открытие несоизмеримости, которое явно показало различие между дискретной природой (рациональных) чисел и непрерывной природой геометрических величин, привело, как известно, к большим трудностям, связанным с понятием бесконечности, к настоящему кризису в обосновании математики[2]. Эти трудности были особенно ярко выявлены в *апориях* — затруднительных положениях (*парадоксах*) элейского философа Зенона (V в. до н. э.). Из 45 его апорий через «Физику» Аристотеля и комментарий к ней Симпликия (VI в.) до нас дошли 9. Остановимся на некоторых из них, относящихся к движению (рис. 1).

1. *Дихотомия* (означает по-гречески «деление пополам»). В этой апории Зенон утверждает, что движение невозможно, ибо до того, как движущееся тело пройдет расстояние от точки A до точки B, оно должно пройти $\frac{1}{2}$ этого расстояния (отрезка), а до этого — $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ ... его, но последовательность таких отрезков бесконечна, значит, точка B никогда не будет достигнута. Парадокс (апория), выдвигаемый как непреодолимый логический тупик, состоит в том, что сумма бесконечного множества слагаемых конечна.

Рис. 1.

Впрочем, эта апория свидетельствует о том, что уже в середине V в. до н. э. греческие ученые занимались суммированием бесконечной геометрической прогрессии

---

[1] Подробнее см. ниже, § 1, 9.

[2] За этим *первым* кризисом последовал в конце XVIII в.— начале XIX в. *второй*, а в конце этого же века *третий* кризис оснований математики. См. § 15.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots. \qquad (1)$$

2. *Ахиллес и черепаха.*

Храбрейший и быстроногий Ахиллес никогда не догонит черепахи, если она находится впереди него даже на малом расстоянии, утверждает Зенон. Его доказательство сводится к следующему: пусть Ахиллес бежит в n раз быстрее черепахи и пусть их разделяет расстояние d. Когда Ахиллес пройдет это расстояние, одновременно с ним начавшая свое движение черапаха отойдет на $\frac{d}{n}$; когда же Ахиллес покроет и это расстояние, движущаяся вперед черепаха будет находиться впереди него на $\frac{d}{n^2}$ и т. д. Между Ахиллесом и черепахой всегда будет оставаться определенное расстояние (рис. 1).

3. *Стрела.*

Зенон доказывает, что движение летящей стрелы невозможно ввиду того, что в каждый неделимый момент времени она покоится, а промежуток времени является суммой бесконечного числа неделимых моментов. Затруднение состоит в том, что если время складывается из неделимых «моментов», в каждом из которых тело покоится (иначе «неделимое» подразделялось бы на части, соответствующие различным положениям тела), то и в итоге не можем получить движения. К такому же выводу приводит и четвертая апория движения — «Стадион», или «Стадий».

Таким образом, в вышеприведенных первых двух апориях Зенон вскрывает логические трудности, связанные с гипотезой о бесконечной делимости отрезков пути и времени, о непрерывности пространства; в третьей и четвертой он указывает на логические противоречия, связанные с допущением дискретной структуры пространства и времени. Своими апориями Зенон обратил внимание ученых и философов на противоречия, встречаемые с формально-логической точки зрения при введении понятия бесконечности в науку.

Апории Зенона нельзя смешивать с математическими софизмами (вроде доказательства того, что $1 = 5$), объяснение которых часто предлагается учащимся на викторинах и кружках. Апории Зенона затрагивают глубокие и серьезные вопросы, полное разрешение которых до сих пор не достигнуто. В разные эпохи ученые искали пути выхода из затруднений, указанных Зеноном. Со стороны античных философов и математиков апории Зенона подвергались разнообразной критике. Так, Диоген, опровергая невозможность движения, обратился непосредственно к опыту — он, ни слова не говоря, стал ходить около своей бочкч, в которой он проводил ночь. Демокрит из Абдеры высказал идею о том, что отношение малых отрезков пути к соответствующим малым промежуткам времени остается конечным и определяет скорость дви-

жения. В высказываниях Демокрита содержатся зачатки исчисления бесконечно малых величин. Впоследствии идея Демокрита была использована Архимедом при создании первых интеграционных приемов вычислений площадей и объемов фигур. В XVII в. математики, опираясь на работы Архимеда, пришли к созданию дифференциальных и интегральных исчислений. Некоторые древнегреческие математики оставались на позициях Анаксагора. К взглядам последнего примкнул, в частности, один из величайших математиков V в. до н. э. — Евдокс Книдский, автор «аксиомы Архимеда» и «метода исчерпывания».

Понятию математической бесконечности уделил большое внимание крупнейший философ древности Аристотель (IV в. до н э.), логические сочинения которого, объединенные в византийское время под общим названием «Органон», служили на протяжении веков основой формальной логики. Аристотель вообще колебался между идеализмом и материализмом, однако в вопросах математики он стоял на материалистических позициях. Так, например, в отличие от Платона он учил, что математические понятия не являются априорными (врожденными), а представляют собой абстракции от предметов реального мира. Пространство, согласно Аристотелю, безгранично делимо, непрерывно. В своей «Физике» он так определяет непрерывность: «Я говорю о непрерывном, когда граница, по которой соприкасаются оба следующих друг за другом предмета, становится для обоих одной и той же и, как показывает название, не прерывается, а это невозможно, пока у них существуют два края».

Возражая против концепции актуально бесконечно малых, он далее пишет: «Невозможно ничему непрерывному состоять из неделимых частей, например линии из точек, если линия непрерывна, а точка неделима». Аристотель возражал против использования актуальной бесконечности в науке, ссылаясь на то, что, зная способы счета конечного числа объектов, нельзя эти способы распространять на бесконечные множества. Взгляды Аристотеля в отношении математической бесконечности не были лишены противоречий. Сознавая большие трудности, связанные с понятием бесконечности и с разрешением апорий Зенона, Аристотель пытался найти выход и как-то обосновать разрыв между непрерывностью и дискретностью. Он выступал против пользования понятием движения в математике, мотивируя это тем, что эта наука занимается не самими реальными вещами, а лишь абстракциями от них.

Такая позиция и мотивировка ее с точки зрения современной математики и марксистско-ленинской философии неверны. Наоборот, если реальные предметы находятся в постоянном движении и в тесной взаимосвязи, то и абстракции их — поверхности, линии и точки — следует рассматривать в их взаимосвязи и движении. Огромные достижения математических наук не были бы возможными без применения понятий «переменные» и «движение». Аристотель также выступал за полное отделение геометрии, науки о не-

прерывных величинах, от арифметики, науки о дискретных величинах.

Этих взглядов придерживался и Евклид, который неявно пользовался понятием о непрерывности линий. Свою геометрию Евклид строит, не прибегая к помощи чисел, а «чисто геометрически», т. е. конструктивно. Однако вся геометрия Евклида может быть построена в пространстве, координаты точек которого, т. е. отрезка, являются числами, а они принадлежат подмножеству множества алгебраических чисел. Известно, что изложенная в V книге общая теория отношений и пропорций принадлежит Евдоксу Книдскому.

Возвращаясь к апориям Зенона, следует отметить, что они интересовали выдающихся математиков и философов всех времен. До настоящих дней об апориях существуют разные, порой крайне противоположные мнения. Одни считают, что апории «Дихотомия» и «Ахиллес», в которых отрицается движение, исходя из представлений о непрерывности и неограниченной делимости пространства, свидетельствуют лишь о том, что Зенон, не имея понятия «предел», не умел суммировать геометрическую прогрессию вроде (1) и ошибочно считал, что сумма бесконечно большого числа членов любого, в том числе и сходящегося ряда должна быть бесконечно большой. Другие же ученые признают, что проблемы, связанные с апориями Зенона и затрагивающие соотношения непрерывного и дискретного, относятся к самым трудным вопросам философии и обоснования математики и физики, которые поныне остаются актуальными. Этим вопросам посвящена огромная литература, написанная на протяжении двух с половиной тысяч лет.

С точки зрения диалектического материализма в объективном реальном мире дискретное и непрерывное, движение и покой находятся в диалектическом единстве. Но нельзя отобразить движение, не остановив его, т. е. не прибегая к покою — его противоположности. Это имел в виду и В. И. Ленин, когда по поводу апорий Зенона писал: «Мы не можем представить, выразить, смерить, изобразить движения, не прервав непрерывного, не упростив, огрубив, не разделив, не омертвив живого...

И в этом *суть* диалектики. *Эту-то суть* и выражает формула: единство, тождество противоположностей»[1]. Более подробно об этом пишет советский историк математики Софья Александровна Яновская в статье «Преодолены ли в современной науке трудности, известные под названием «Апорий Зенона»?» («Проблемы логики». М., Изд-во АН СССР, 1963).

В настоящее время в основе изучения геометрии и математического анализа лежит понятие о вещественном числе. Множество вещественных чисел, как и множество точек прямой, обладает свойством непрерывности. Вещественным числом можно выразить

---

[1] Ленин В. И. Философские тетради. — Полн. собр. соч., т. 29, с. 233

отношение двух любых однородных величин. Однако, как известно, расширение понятия числа до вещественного и обоснование соответствующей теории были завершены только в XIX в.[1]. Греки же, которые при открытии несоизмеримости имели представление лишь о дискретном множестве чисел (натуральных и в лучшем случае положительных рациональных), пошли в V—VI вв. по пути геометризации арифметики и строили общую теорию отношений, аналогичную нашей теории вещественных чисел, применяя ее к учению о подобии, к вопросам измерения площадей и объемов и вообще к исследованию непрерывных величин.

Изложим вкратце суть евдоксовой общей теории отношений (величин), содержащейся в V книге «Начал» Евклида. Величины здесь изображены отрезками, причем предполагается, что для любой пары величин найдется соответствующая пара отрезков a, b так, что отношение величин будет равно отношению отрезков $a : b$. В самом начале V книги вводится так называемая аксиома Архимеда, которую правильнее было бы называть аксиомой Евдокса, или аксиомой Евдокса — Архимеда. Две однородные величины могут находиться в математическом отношении, только если на них распространяется эта аксиома, которая является одной из аксиом непрерывности.

Равенство отношений определяется следующим образом: величины A, B имеют то же отношение, что и величины C, D, если для любой пары натуральных чисел m и n выполняется какое-либо из следующих трех условий:

$$1)\quad mA < nB \text{ и } mC < nD;$$

$$2)\quad mA = nB \text{ и } mC = nD;$$

$$3)\quad mA > nB \text{ и } mC > nD.$$

Современной операции умножения вещественных чисел у Евдокса соответствует составление отношений. «Составить» пару отношений $A : B$ и $B : C$ — значит найти отношение $A : C$, «составленное». Чтобы составить произвольные два отношения $a : b$ и $c : d$, требуется предварительно найти отношение $b : x$, равное $c : d$, что осуществляется путем построения к любым трем отрезкам c, d, b четвертого пропорционального отрезка x. В V книге устанавливаются основные свойства отношений и их составления. Вышеприведенное определение отношений было, вероятно, подсказано Евдоксу как свойствами отношений соизмеримых величин, так и рассмотрением процесса измерения непрерывных геометрических величин. Целесообразность этого определения, конечно, можно проверить на разных примерах. О том, что некоторые математики неправильно его понимали, свидетельствует случай с французским ученым XVI в. П. Рамусом. Последний, возражавший против

---

[1] См. § 1; 1, 2.

определения равенства отношений Евдокса, ссылался на следующий пример. Для чисел 4; 3 и 5; 4, $m = 6$, $n = 9$ имеет место неравенство

$$6 \cdot 4 < 9 \cdot 3 \quad \text{и} \quad 6 \cdot 5 < 9 \cdot 4,$$

но вместе с этим отношение 4 : 3 не равно отношению 5 : 4. Рамус не учел, что речь идет не об определенной одной паре или о конечном числе пар натуральных чисел m, n, а о *произвольной паре*. Достаточно в данном случае взять $m = 6$, $n = 8$, чтобы получить:

$$6 \cdot 4 = 8 \cdot 3,$$

в то время как $6 \cdot 5 < 8 \cdot 4$.

Именно тот факт, что равенство отношений определяется Евдоксом с помощью *бесконечного* множества неравенств типа 1) или 3), вызывал много трудностей для понимания его теории, предвосхитившей теорию вещественных чисел Дедекинда. И метод исчерпывания Евдокса основывается на идее неограниченного приближения к некоторой величине с помощью последовательности неограниченного числа значений других величин и на основе безграничного деления любой величины на части, меньшие любых наперед заданных величин, т. е. в конечном итоге на идее *потенциальной бесконечности*, на которой базируется и метод пределов, которым пользуемся и мы. С помощью метода исчерпывания Евдокс строго доказал, что объем пирамиды равен $^1/_3$ объема призмы с тем же основанием и высотой и другие предложения.

В итоге можно сказать, что идея бесконечности возникла и применялась в древнегреческой математике главным образом в связи с развитием арифметики и теории чисел (натуральный ряд, бесконечное множество простых чисел и др.), с открытием несоизмеримости и с вопросами измерения и исследования свойств геометрических фигур, рассматриваемых как непрерывные.

Понятие бесконечности развивалось в математике в тесной связи с решением конкретных математических задач и соответствующей разработкой математических методов (общая теория отношений, квадратура круга, метод исчерпывания и др.).

Несмотря на то что апории Зенона оставались по существу неразрешенными, они не смогли изгнать идею бесконечности из математики.

Широко использовал бесконечность и Архимед в своих исследованиях.

4. История числа «пи»

Число «пи» (π) выражает отношение длины окружности к своему диаметру.

В Древнем Египте площадь круга диаметром d определяли как $(d - \frac{d}{9})^2$ — эта запись дана здесь в современных символах.

Из приведенного выражения можно заключить, что в то время число «пи» считали равным дроби $\left(\frac{16}{9}\right)^2$, или $\frac{256}{81}$, т. е. $\pi \approx$ $\approx 3{,}160\ldots$.

В священной книге джайнизма (одной из древнейших религий, существовавших в Индии и возникшей в VI в. до н. э) имеется указание, из которого следует, что число «пи» в то время принимали равным $\sqrt{10}$, что дает дробь $3{,}162\ldots$.

Древние греки Евдокс, Гиппократ и др. измерение окружности сводили к построению соответствующего отрезка, а измерение круга — к построению равновеликого квадрата. Следует заметить, что на протяжении многих столетий математики разных стран и народов пытались выразить отношение длины окружности к диаметру рациональным числом.

Архимед в III в. до н. э. обосновал в своей небольшой работе «Измерение круга» три положения: 1) всякий круг равновелик прямоугольному треугольнику, катеты которого соответственно равны длине окружности и ее радиусу; 2) площади круга относятся к квадрату, построенному на диаметре, как 11 к 14; 3) отношение любой окружности к ее диаметру меньше $3\frac{1}{7}$ и больше $3\frac{10}{71}$. (Вероятно, в первоисточнике третье предложение стояло на месте второго, но при переписке или при переводе была допущена погрешность. Нужно заметить, что арабы располагали более точным текстом этой работы, чем мы.) Последнее предложение Архимед обосновал последовательным вычислением периметров правильных вписанных и описанных многоугольников при удвоении числа их сторон. Сначала он удвоил число сторон правильных описанного и вписанного шестиугольников, затем двенадцатиугольников и т. д., доведя до вычисления периметров правильного вписанного и описанного многоугольников с 96 сторонами. По точным расчетам Архимеда отношение окружности к диаметру заключено между числами $3\frac{10}{71}$ и $3\frac{1}{7}$, а это означает, что $\pi \approx 3{,}1419\ldots$. Истинное значение этого отношения $3{,}1415922653\ldots$.

В V в. н. э. китайским математиком Цзу Чунчжи было найдено более точное значение этого числа: $\pi \approx 3{,}1415927\ \ldots$.

В первой половине XV в. в обсерватории Улугбека, возле Самарканда, астроном и математик ал-Каши вычислил «пи» с 16 десятичными знаками. Он сделал 27 удвоений числа сторон многоугольников и дошел до многоугольника, имеющего $3 \cdot 2^{28}$ углов. Ал-Каши произвел уникальные расчеты, которые были нужны для составления таблиц синусов с шагом в $1'$. Эти таблицы сыграли важную роль в астрономии.

Спустя полтора столетия в Европе Ф. Виет нашел число «пи» только с 9 правильными десятичными знаками, сделав 16 удвоений числа сторон многоугольников. Но при этом Ф. Виет первым заметил, что число «пи» можно отыскать, используя пределы неко-

торых рядов. Это открытие имело большое значение, так как позволило вычислять «пи» с какой угодно точностью. Только через 250 лет после ал-Каши его результат был превзойден.

Первым ввел обозначение отношения длины окружности к диаметру современным символом π английский математик У. Джонсон в 1706 г. В качестве символа он взял первую букву греческого слова «периферия», что в переводе означает «окружность». Введенное У. Джонсоном обозначение стало общеупотребительным после опубликования работ Л. Эйлера, который воспользовался введенным символом впервые в 1736 г.

В конце XVIII в. А. М. Лежандр на основе работ И. Г Ламберта доказал, что число π иррационально Затем немецкий математик Ф. Линдеман, опираясь на исследования Ш. Эрмита, нашел строгое доказательство того, что это число не только иррационально, но и трансцендентно, т. е. не может быть корнем алгебраического уравнения. Из последнего следует, что с помощью только циркуля и линейки построить отрезок, равный по длине окружности, невозможно, а следовательно, не существует решения задачи о квадратуре круга.

Поиски точного выражения числа π продолжались и после работ Ф. Виета. В начале XVII в. голландский математик из Кёльна Лудольф ван Цейлен (1540—1610) — некоторые историки его называют Л ван Кейлен — нашел 32 правильных знака. С тех пор (год публикации 1615) значение числа π с 32 десятичными знаками получило название числа Лудольфа.

К концу XIX в., после 20 лет упорного труда, англичанин Вильям Шенкс нашел 707 знаков числа π. Однако в 1945 г. обнаружено с помощью ЭВМ, что Шенкс в своих вычислениях допустил ошибку в 520-м знаке и дальнейшие его вычисления оказались неверными.

После разработки методов дифференциального и интегрального исчисления было найдено много формул, которые содержат число «пи». Некоторые из этих формул позволяют вычислять «пи» приемами, отличными от метода Архимеда и более рациональными. Например, к числу «пи» можно прийти, отыскивая пределы некоторых рядов. Так, Г. Лейбниц (1646—1716) получил в 1674 г. ряд $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4}$, который дал возможность вычислить «пи» более коротким путем, нежели Архимед. Все же указанный ряд сходится очень медленно и поэтому требует довольно продолжительных расчетов. Для вычисления «пи» удобнее использовать ряд, получаемый от разложения $\operatorname{arctg} x$ при значении $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, при котором разложение функции $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ в ряд дает равенство

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots\right],$$ т. е.

$$\pi = 2\sqrt{3}\left[1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots\right].$$

Частично суммы этого ряда можно вычислять по формуле $S_{n+1} = S_n + \frac{2\sqrt{3}}{2n+1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$, при этом π будет ограничено двойным неравенством

$$S_{2n} < \pi < S_{2n+1}.$$

Еще более удобную формулу для вычисления π получил Дж. Мачин. Пользуясь этой формулой, он вычислил π (в 1706 г.) с точностью до 100 верных знаков. Хорошее приближение для «пи» дает выражение $\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Однако следует помнить, что это равенство надо рассматривать как приближенное, так как правая часть его — число алгебраическое, а левая — число трансцендентное, следовательно, эти числа равными быть не могут.

Как указала в своих статьях Э. Я. Бахмутская (60-е годы нашего столетия), еще в XV—XVI вв. южноиндийские ученые, в том числе Нилаканта, пользуясь приемами приближенных вычислений числа π, нашли способ разложения arctg Θ в степенной ряд, подобный ряду, найденному Лейбницем. Индийские математики дали словесную формулировку правил для разложения в ряды синуса и косинуса. Этим они предвосхитили открытия европейских математиков XVII в. Тем не менее их изолированные и ограниченные практическими потребностями вычислительные работы никакого влияния на дальнейшее развитие науки не оказали.

В наше время труд вычислителей заменили ЭВМ. С их помощью число «пи» вычислено с точностью более пятисот тысяч знаков, причем эти вычисления продолжались только несколько часов.

В современной математике число π — это не только отношение длин окружности к диаметру, оно входит в большое число различных формул, в том числе и в формулы неевклидовой геометрии, и определяется чисто аналитически. Входит оно и в замечательную формулу Л. Эйлера, которая устанавливает связь числа π и числа «e» следующим образом: $e^{2\pi i} = 1$, где $i = \sqrt{-1}$. Эта и другие взаимозависимости позволили математикам еще глубже выяснить природу числа π.

5. Определение функции в XVIII в.

Начиная с XVII в. одним из важнейших понятий является понятие функции. Оно сыграло и поныне играет большую роль в познании реального мира.

Идея функциональной зависимости восходит к древности, она содержится уже в первых математически выраженных соотношениях между величинами, в первых правилах действий над числами, в первых формулах для нахождения площади и объема тех или иных фигур.

Те вавилонские ученые, которые 4—5 тысяч лет назад нашли для площади S круга радиусом r формулу $S = 3r^2$ (грубо приближенную), тем самым установили, пусть и несознательно, что площадь круга является функцией от его радиуса. Таблицы квадратов и кубов чисел, также применявшиеся вавилонянами, представляют собой задания функции. Другим примером могут служить тригонометрические таблицы, составление которых началось задолго до начала нашей эры. Особый интерес представляют таблицы синусов Беруни, в которых дано правило линейного интерполирования. В современной символике его можно выразить так:

$$\sin x = \sin x_0 + (x - x_0)\,\frac{\sin(x_0 + 15') - \sin x_0}{15'}\,.$$

Причем автор не ограничивается этим правилом для всех таблиц, но приводит правило квадратичного интерполирования (см. ИМИ, вып. 12, ст. Б. А. Розенфельда).

Однако явное и вполне сознательное применение понятия функции и систематическое изучение функциональной зависимости берут свое начало в XVII в. в связи с проникновением в математику идеи переменных. В «Геометрии» Декарта и в работах Ферма, Ньютона и Лейбница понятие функции носило по существу интуитивный характер и было связано либо с геометрическими, либо с механическими представлениями: ординаты точек кривых — функции от абсцисс (x); путь и скорость — функции от времени (t) и т. п.

Четкого представления понятия функции в XVII в. еще не было, однако путь к первому такому определению проложил Декарт, который систематически рассматривал в своей «Геометрии» лишь те кривые, которые можно точно представить с помощью уравнений, притом преимущественно алгебраических. Постепенно понятие функции стало отождествляться таким образом с понятием *аналитического выражения* — формулы.

Слово «функция» (от латинского *functio* — совершение, выполнение) Лейбниц употреблял с 1673 г. в смысле *роли* (величина, выполняющая ту или иную функцию). Как термин в нашем смысле выражение «функция от x» стало употребляться Лейбницем и И. Бернулли; начиная с 1698 г. Лейбниц ввел также термины «переменная» и «константа» (постоянная). Для обозначения произвольной функции от x Иоганн Бернулли применял знак φ_x, называя φ характеристикой функции, а также буквы x или ε; Лейбниц употреблял x^1, x^2 вместо современных $f_1(x)$, $f_2(x)$. Эйлер обозначал через $f : y$, $f : (x + y)$ то, что мы ныне обозначаем через $f(x)$, $f(x + y)$. Наряду с φ Эйлер предлагает пользоваться и буквами Φ, Ψ и др. Даламбер сделал шаг вперед на пути к современным обозначениям, отбрасывая эйлерово двоеточие; он пишет, например, φt, $\varphi(t + s)$.

Явное определение функции было впервые дано в 1718 г. одним из учеников и сотрудников Лейбница, выдающимся швейцарским

Л Эйлер

математиком Иоганном Бернулли: «Функцией переменной величины называют количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных».

Леонард Эйлер во «Введении в анализ бесконечных» (1748) примыкает к определению своего учителя И. Бернулли, несколько уточняя его. Определение Л. Эйлера гласит: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого количества и чисел или постоянных количеств». Так понимали функцию на протяжении почти всего XVIII в. Даламбер, Лагранж и другие видные математики. Что касается Л. Эйлера, то он не всегда придерживался вышеуказанного определения; в его работах понятие функции подвергалось дальнейшему развитию в соответствии с запросами математического анализа. В некоторых своих произведениях Л. Эйлер придает более широкий смысл функции, понимая ее как кривую, начертанную «свободным влечением руки». В связи с таким взглядом Л. Эйлера на функцию между ним и его современниками, в первую очередь его постоянным соперником, крупным французским математиком Даламбером, возникла большая полемика вокруг вопроса о возможности аналитического выражения произвольной кривой и о том, какое из двух понятий (кривая или формула) следует считать более широким. Так возник знаменитый спор, связанный с исследованием колебаний струны.

В «Дифференциальном исчислении», вышедшем в свет в 1755 г., Л. Эйлер дает общее определение функции: «Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых»[1]. «Это наименование, — продолжает далее Эйлер, — имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество определяется с помощью других». На основе этого определения Эйлера французский математик С. Ф. Лакруа в своем «Трактате по дифференциальному и интегральному исчислению», опубликованном в 1797 г., смог записать следующее: «Всякое количество, значение которого зависит от одного или многих других количеств, называется функцией этих последних независимо от того, известно или нет, какие операции нужно применить, чтобы перейти от них к первому».

---

[1] Эйлер Л. Дифференциальное исчисление / Пер., вступительная статья и прим. Выгодского М. Я. М., 1949, с. 38.

Как видно из приведенных определений, само понятие функции фактически отождествлялось с аналитическим выражением. Новые шаги в развитии естествознания и математики в XIX в. вызвали и дальнейшее обобщение понятия функции.

6. Общее определение функции в XIX в. Дальнейшее развитие понятия функции

Одним из нерешенных в XVIII в. вопросов, связанных с понятием функции, по поводу которого велась ожесточенная борьба мнений, был следующий: можно ли одну функцию задать несколькими аналитическими выражениями?

Большой вклад в решение спора Эйлера, Даламбера, Д. Бернулли и других ученых XVIII в. по поводу того, что следует понимать под *функцией*, внес французский математик Жан Батист Жозеф Фурье (1768—1830), занимавшийся в основном математической физикой[1]. В представленных им в Парижскую Академию наук в 1807 и 1811 гг. мемуарах по теории распространения тепла в твердом теле Фурье привел и первые примеры функций, которые заданы на различных участках различными аналитическими выражениями.

Из трудов Фурье явствовало, что любая кривая независимо от того, из скольких и каких разнородных частей она составлена, может быть представлена в виде единого аналитического выражения[2] и что имеются также прерывные кривые, изображаемые аналитическим выражением. В своем «Курсе алгебраического анализа», опубликованном в 1821 г., французский математик О. Коши обосновал выводы Фурье. Таким образом, на известном этапе развития физики и математики стало ясно, что приходится пользоваться и такими функциями, для определения которых очень сложно или даже невозможно ограничиться одним лишь аналитическим аппаратом. Последний стал тормозить требуемое математикой и естествознанием расширение понятия функции.

В 1834 г. в работе «Об исчезании тригонометрических строк» Н. И. Лобачевский, развивая вышеупомянутое эйлеровское определение функции в 1755 г., писал: «Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной... Обширный взгляд теории допускает существование зависи-

---

[1] Математические методы исследований встречающихся в физике дифференциальных уравнений.

[2] В частности, начальная форма колеблющейся струны — ломаная линия — выражается единым тригонометрическим рядом

мости только в том смысле, чтобы числа, одни с другими в связи, принимать как бы данными вместе»[1].

Еще до Лобачевского аналогичная точка зрения на понятие функции была высказана чешским математиком Б. Больцано. В 1837 г. немецкий математик П. Лежен-Дирихле так сформулировал общее определение понятия функции: «y есть функция переменной x (на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$), если каждому значению x (на этом отрезке) соответствует совершенно определенное значение y, причем безразлично, каким образом установлено это соответствие — аналитической формулой, графиком, таблицей либо даже просто словами».

Примером, соответствующим этому общему определению, может служить так называемая «функция Дирихле» $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \text{ для всех рациональных значений } x, \\ 0 \text{ для всех иррациональных значений } x. \end{cases}$$

Эта функция задана двумя формулами и словесно. Она играет известную роль в анализе. Аналитически ее можно определить лишь с помощью довольно сложной формулы, не способствующей успешному изучению ее свойств. Таким образом, примерно в середине XIX в. после длительной борьбы мнений понятие функции освободилось от уз аналитического выражения, от единовластия математической формулы. Главный упор в новом общем определении понятия функции делается на идею *соответствия*.

Во второй половине XIX в. после создания теории множеств в понятие функции, помимо идеи соответствия, была включена и идея множества. Таким образом, в полном своем объеме общее определение понятия функции[2] формулируется следующим образом: если каждому элементу x множества A поставлен в соответствие некоторый определенный элемент y множества B, то говорят, что *на множестве*[3] A *задана функция* $y = f(x)$, *или что множество* A *отображено на множество* B. В первом случае элементы x множества A называют значениями аргумента, а элементы y множества B — значениями функции; во втором случае x — *прообразы*, y — *образы*. В современном смысле рассматривают функции, определенные для множества значений x, которые, возможно, и не заполняют отрезка $a \leqslant x \leqslant b$, о котором говорится в определении Дирихле. Достаточно указать, например, на функцию-факториал $y = n!$, заданную на множестве натуральных чисел. Общее понятие функции применимо, конечно, не только к величинам и числам, но и к другим математическим объектам, например к геометри-

---

[1] См.: Лобачевский Н. И. Полн. собр. соч. М.; Л., 1951, с. 43, 44

[2] Однозначной.

[3] При «отображении на» требуется, чтобы каждому элементу y множества B соответствовал по крайней мере один элемент x множества A.

ческим фигурам. При любом геометрическом преобразовании (отображении) мы имеем дело с функцией.

Вот простой пример (рис. 2). Пусть $x_1x_2x_3$ — треугольник, d — прямая в плоскости треугольника, рассматриваемая как ось симметрии. Каждой точке x (x_1, x_2, x_3, x_4, ...), лежащей внутри или на сторонах треугольника, ставим в соответствие точку y (y_1, y_2, y_3, y_4, ...), определенную указанным преобразованием симметрии. Таким образом, множество точек треугольника $x_1x_2x_3$ отображено на множество точек треугольника $y_1y_2y_3$. Налицо имеется функция $y = f(x)$, заданная на множестве x (значения аргумента, прообразы) точек треугольника $x_1x_2x_3$. Это так называемая «область определения функции». Симметричный треугольник $y_1y_2y_3$ представляет множество y значений функции (образов). Характеристика f функции в данном случае указывает на осевую симметрию относительно данной прямой d.

Общее определение функций по Дирихле[1] сформировалось после длившихся целый век дискуссий в результате значительных открытий в физике и математике в XVIII и первой половине XIX в. Дальнейшее развитие математической науки в XIX в. основывалось на этом определении, ставшем классическим. Но уже с самого начала XX в. это определение стало вызывать некоторые сомнения среди части математиков. Еще важнее была критика физиков, натолкнувшихся на явления, потребовавшие более широкого взгляда на функцию. Необходимость дальнейшего расширения понятия функции стала особенно острой после выхода в свет в 1930 г. книги «Основы квантовой механики» Поля Дирака (род. в 1902 г.), крупнейшего английского физика, одного из основателей квантовой механики. Дирак ввел так называемую *дельта-функцию*, которая выходит далеко за рамки классического определения функции. В связи с этим советский математик Н. М. Гюнтер и другие ученые опубликовали в 30—40-х годах нашего столетия работы, в которых неизвестными являются не функции точки, а «функции области», что лучше соответствует физической сущности явлений. Так, например, температуру тела в точке практически определить нельзя, в то время как средняя температура в некоторой области тела имеет конкретный физический смысл.

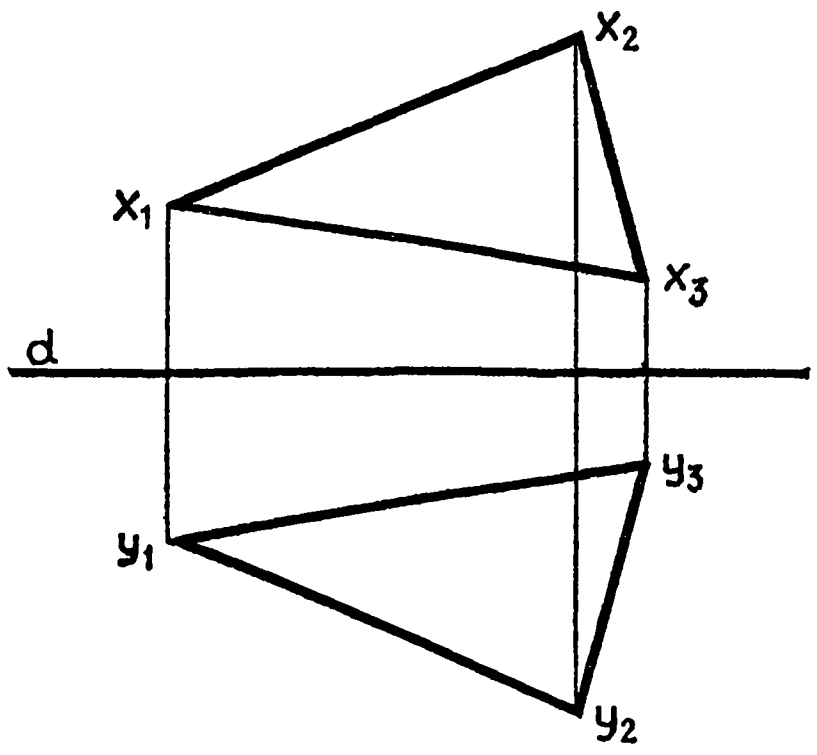


Рис. 2.

В общем виде понятие обобщенной функции было введено французом Лораном Шварцем. В 1936 г. 28-летний советский

[1] Об аналогичном определении Лобачевского ученые долгое время не знали.

С. Л. Соболев

математик и механик Сергей Львович Соболев (ныне академик) первым рассмотрел частный случай обобщенной функции, включающей и дельта-функцию, и применил созданную теорию к решению ряда задач математической физики. Важный вклад в развитие теории обобщенных функций внесли ученики и последователи Л. Шварца — И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов и др.

Краткий обзор развития понятия функции приводит к мысли о том, что эволюция еще далеко не закончена и, вероятно, никогда не закончится, как никогда не закончится и эволюция математики в целом. Новые открытия и запросы естествознания и других наук приведут к новым расширениям понятия функции и других математических понятий. Математика — незавершенная наука, она развивалась на протяжении тысячелетий, развивается в нашу эпоху и будет развиваться в дальнейшем.

7. Идея предела в древности. Метод исчерпывания

Происхождение понятия предела, корни которого уходят в глубокую древность, связано с определением площадей криволинейных фигур и объемов тел, ограниченных кривыми поверхностями.

Первое теоретическое обобщение и обоснование методов вычисления площадей и объемов, в которых неявно использовались предельные переходы, было дано величайшим греческим математиком IV в. до н. э. Евдоксом Книдским. Метод Евдокса был назван в XVII в. методом исчерпывания. Им пользовались Евклид, Архимед и другие ученые древности. В длинной эволюции, которую на протяжении почти 2500 лет претерпело понятие предела, метод исчерпывания представляет собой первый этап.

Но в чем состоит этот метод и почему он был так назван?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим, как доказана во втором предложении XII книги «Начал» Евклида теорема: «Круги будут друг к другу как квадраты на диаметрах», т. е. площади двух кругов относятся между собой как квадраты их диаметров (рис. 3). Доказательство этой теоремы, как и многих других теорем, включенных Евклидом в свои «Начала», приписывается Евдоксу. Это доказательство основывается на следующей лемме того же Евдокса (первое предложение X книги «Начал» Евклида). Если даны две любые неравные величины a и b $(a > b)$ и если из a вычитается часть $c > \frac{a}{2}$, а из остатка a_1 снова вычитается часть

$d > \frac{a_1}{2}$ и это повторяется постоянно, то останется некоторая величина[1] a_n, меньшая b.

Доказательство (от противного) теоремы об отношении $\frac{Q}{q}$ площадей двух кругов K и k проводится в «Началах» так: пусть квадрат отношения диаметров $\frac{BD^2}{IG^2} \neq \frac{Q}{q}$, тогда будет:

$$\frac{BD^2}{IG^2} = \frac{Q}{T}, \tag{1}$$

где, допустим, $T < q$. Впишем в круг k квадрат со стороной IE. Его площадь больше площади полукруга k, так как площадь описанного около k квадрата вдвое больше площади вписанного, а площадь круга меньше площади описанного квадрата. Разделим дальше пополам дуги IE, EG, GH и HI, стягиваемые сторонами вписанного квадрата, и построим правильный восьмиугольник $IKENGMHL$. Тогда площадь каждого из треугольников IKE, ENG, ... будет больше половины площади соответствующего кругового сегмента, ввиду того что площадь описанного около сегмента прямоугольника больше площади сектора и точно равна удвоенной площади треугольника. Продолжая дальше указанный процесс с удвоением числа сторон и увеличением площади правильных вписанных многоугольников, согласно вышеуказанной лемме Евдокса сумма площадей всех оставшихся круговых сегментов будет меньше разности $q - T$, а площадь соответствующего вписанного многоугольника m окажется больше T. Впишем теперь в круг K многоугольник M, подобный m. На основе ранее доказанной в «Началах» теоремы (XII_1) отношение площадей подобных вписанных многоугольников равно именно отношению квадратов диаметров[2]. Итак, мы имеем наряду с (1) соотношение

$$\frac{BD^2}{IG^2} = \frac{\text{пл. } M}{\text{пл. } m}, \tag{2}$$

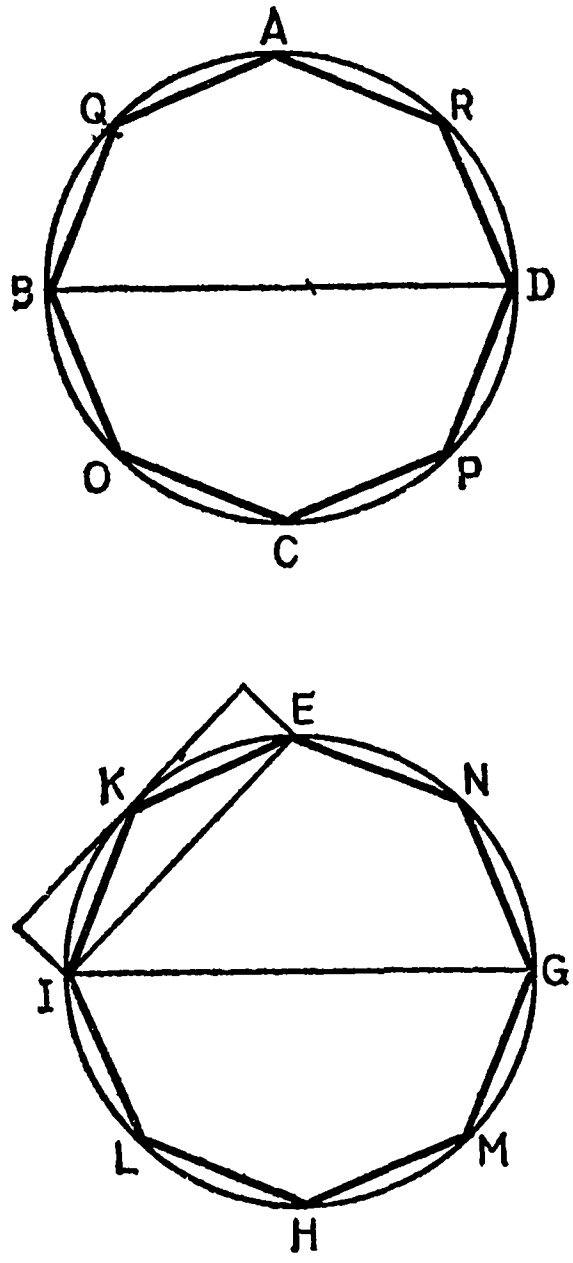


Рис. 3. «Круги будут друг к другу как квадраты на диаметрах».

[1] Сегодня мы бы сказали: «a_n есть бесконечно малое или предел a_n равен нулю».

[2] Существование T не доказывается, а допускается.

а отсюда

$$\frac{Q}{T} = \frac{M}{m}, \quad \text{или} \quad \frac{Q}{M} = \frac{T}{m}, \tag{3}$$

что нелепо, так как $Q > M$, в то время как $T < m$.

Аналогично теорема доказывается и в случае замены q через $S > q$. Отсюда и

$$\frac{Q}{q} = \frac{BD^2}{IG^2}.$$

Из изложенного вытекает, что по существу речь идет о пределе возрастающей последовательности площадей правильных вписанных многоугольников. Доказывается, что разность между площадью круга и площадью вписанного многоугольника, члена последовательности, может быть сделана меньше произвольного наперед заданного $\varepsilon > 0$. В указанном доказательстве как бы исчерпывается пространство, заключенное между все возрастающими вписанными многоугольниками и кругом, что и побудило ученых XVII в. назвать этот способ методом исчерпывания[1].

С помощью своего метода Евдокс доказал, что объем пирамиды равен трети объема призмы с той же высотой и тем же основанием, а объем конуса равен трети объема соответствующего цилиндра. Динострат, современник и ученик Евдокса, применил методы своего учителя при исследовании квадратрисы и фактически нашел первые два замечательных предела, которые в современной записи имеют вид:

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1, \quad \lim_{\varphi \to 0} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi} = 1.$$

С помощью метода исчерпывания в «Началах» доказывается ряд предложений, в том числе и теорема о том, что объемы двух шаров относятся как кубы их радиусов. Сжимая круг радиуса a, Архимед получает эллипс с полуосями a, b и доказывает, что отношение площади эллипса к площади круга выражается отношением малой полуоси к большой, т. е. $b : a$, а площадь эллипса равна πab.

У Архимеда метод исчерпывания претерпел некоторые изменения и применяется для доказательства того, что круг равновелик треугольнику с основанием, равным длине окружности, и с высотой, равной радиусу[2], для определения площади параболического сегмента[3] и др.

---

[1] Термин «исчерпывать» впервые встречается в «Геометрическом труде» (1647) фламандского ученого Григория Санкт-Винцента, или Грегуара Сен-Венсана, работавшего некоторое время в Праге.

[2] См.: Архимед. Измерение круга. — Соч. М., 1964.

[3] Архимед. Квадратура параболы. — Там же.

Метод исчерпывания использовался в XVII—XVIII вв., а в некоторых учебных руководствах и в XIX и начале XX в.[1].

Галилео Галилей

8. О методе неделимых

Еще Демокрит (V в. до н. э.), обладавший, по словам Маркса и Энгельса, «первым энциклопедическим умом среди греков», учил, что материя состоит из неделимых атомов. Демокрит является отцом и «математического атомизма». Из высказываний Архимеда и Аристотеля следует, что Демокрит рассматривал точки как атомы пространства, имеющие хотя и очень малый, но конечный объем; отрезок имеет, по его мнению, хотя и «сверхчувственно большое», но конечное число точек — «амеров»; геометрические тела состоят из тончайших слоев — «амеров». С помощью «сверхчувственно малых» атомов пространства Демокрит находил площади и объемы фигур, в том числе и объем пирамиды. «Атомы» Демокрита имели много общего с величинами, названными позже «актуально бесконечно малыми» (так называли неделимые, постоянные величины, меньше, однако, любых конечных величин).

Вопросам, связанным с переменными и бесконечно малыми, и, вообще, учению о непрерывном и дискретном было посвящено много трудов разных ученых в древности, в средние века и в новое время. Во второй половине XVI и в XVII в. сочинения Архимеда[2] получили широкое распространение. Галилей, Кеплер и другие ученые нередко писали под влиянием инфинитезимальных методов (метод исчисления бесконечно малых от латинского infinitum — бесконечность), Архимеда[3]. К книге «Новая стереометрия винных бочек», вышедшей в свет в 1615 г., Кеплер вычисляет объемы, основываясь на принципе суммирования неограниченно большого числа беспредельно малых частиц, на которые разбивается тело. Термин «неделимые» ввел ученик Галилея, итальянский математик Бонавентура Кавальери (1598—1647). Последнего и считают осно-

---

[1] Например, в учебниках геометрии, составленных по образцу «Элементов геометрии» Лежандра, в том числе и в «Геометрии» Давидова, применялся по существу метод исчерпывания для доказательства пропорциональности объемов параллелепипедов с равновеликими основаниями, с их высотами и др.

[2] Впервые напечатанные в Базеле (Швейцария) в 1544 г.

[3] См. § 7; 42.

воположником метода неделимых как метода актуально бесконечно малых[1].

В «Геометрии неделимых», опубликованной в 1635 г., Кавальери рассматривает линии как составленные из точек, плоскости — из линий, тела — из плоскостей. Для определения площади плоских фигур последние мыслятся состоящими из бесконечного множества прямых линий (отрезков, хорд), параллельных некоторой данной прямой, называемой «регулой» (направляющей), и ограниченных двумя крайними прямыми, параллельными к «регуле» (касательными). Для нахождения же объема тело как бы разбивается на бесконечное множество сечений параллельными плоскостями. Таким образом, плоские фигуры представляют в виде тканей, состоящих из тончайших параллельных нитей, а тела — в виде книг, состоящих из листов, однако с той существенной разницей, что в отличие от нитей и листов, число которых конечно, неделимых параллельных прямых и плоскостей в фигурах бесконечно много.

В своем учении о неделимых Кавальери колеблется между дискретным и сплошным покрытием фигур своими неделимыми[2], поэтому он часто говорит лишь об отношении площадей и объемов фигур. Принцип, названный его именем, Кавальери выражает не так, как в современных руководствах, а следующим образом: *если линии в двух площадях или плоскости в двух телах будут всегда в одном отношении, то в том же отношении будут в первом случае площади, во втором — объемы.*

В XVII—XVIII вв. многие из последователей Кавальери, в том числе Валлис, уже явно отождествляют неделимые с актуально бесконечно малыми, говоря не только об отношении, но и о равенстве совокупностей неделимых. Метод неделимых был использован также Е. Торричелли, Б. Паскалем и другими учеными того времени и послужил одним из важных этапов в создании интегрального исчисления.

Одновременно с развитием метода неделимых в XVII в. развивался и метод пределов. В своем сочинении «Геометрический труд» Григорий Санкт-Винцент (1584—1667), пользуясь античным методом Евдокса — Архимеда, находит площади и объемы новых фигур путем сравнения соответственно с площадями и объемами известных фигур. С этой целью он вписывает в данные фигуры известные, чтобы последние «исчерпали» соответственно площади или объемы фигур. От употребляемого в этом труде Санкт-Винцента слова «исчерпывать» и произошло название «метод исчерпывания».

---

[1] Сам Кавальери старался не отождествлять свое «неделимое» с актуально бесконечно малым.

[2] Если считать, что точки, линии и плоскости (неделимые) имеют какую-либо толщину, то легко прийти к противоречию, о котором писали еще Р. Бекон и Брадвардин (XIV в.).

Впервые переход к пределу встречается в труде фламандского математика А Такке (1612—1660), озаглавленном «Начала плоской и телесной геометрии...» (1654). Предельный переход в арифметической форме первым изложил в «Арифметике бесконечных» (1656) английский математик Джон Валлис (1616—1703). Дальнейшее развитие этот метод пределов получил в трудах Ньютона.

9. Понятие предела в XVII—XVIII вв. Бесконечно малые

После работ Кеплера, Кавальери и др., в которых впервые в XVII в были применены идеи бесконечного в геометрии, в том же веке последовали работы Ферма, Паскаля, Валлиса, Ньютона и Лейбница, которые привели к формированию новых важнейших понятий — производной, интеграла и к созданию исчисления бесконечно малых.

Понятия производной, дифференциала и интеграла, как и весь математический анализ, ныне основываются на разработанном в XIX в. методе пределов, или, что в сущности все равно, на методе бесконечно малых. Не так это было в XVII и XVIII вв.

В конце XVII в. в Европе образовались две крупные математические школы, которые существовали на протяжении почти всего XVIII в. Главой одной из них был Лейбниц. Как он сам, так и его ученики и сотрудники — Лопиталь, братья Бернулли и его непосредственные последователи, в том числе Эйлер, жили и творили в основном на континенте. Вторая школа, предшественниками которой были Валлис и Барроу, возглавляемая Ньютоном, состояла из английских и шотландских ученых. В их числе был и Маклорен. Обе школы создали новые мощные алгорифмы, приведшие по сути к одним и тем же результатам — к созданию дифференциального и интегрального исчисления. Однако англичане придерживались *метода флюксий*[1] и ньютонова *метода пределов*. Лейбниц же исходил из учения *о бесконечно малых разностях конечных величин*.

Что такое бесконечно малая?

В настоящее время мы на этот вопрос отвечаем так: это переменная величина, стремящаяся к нулю, точнее, имеющая своим пределом нуль. Так, например, при определении предела числовой последовательности с общим членом a_n с помощью неравенства $|a_1 - a_n| < \varepsilon$ разность $|a_1 - a_n|$ и есть бесконечно малая. В процессе вписывания правильных многоугольников с возрастающим числом сторон в круг разность между площадью круга и площадью n-многоугольника изменяется, и чем больше n, тем ближе к нулю эта разность, которая и является в данном случае бесконечно малой. Это привычное нам теперь понятие называют потенциально бесконечно малым. В эпоху же Лейбница под бесконечно малым понима-

[1] См. ниже, § 7; 46.

ли какую-то, хотя и очень малую, но все же конечную, постоянную величину, которая, с одной стороны, должна была быть меньше всякой другой конечной величины, с другой — неравной нулю. Это так называемое *актуально бесконечное малое* носило противоречивый, двойственный, порой мистический характер. Так, например, в анализе Лейбница, с одной стороны, из бесконечного числа бесконечно малых величин складываются конечные величины, откуда логически следовало бы, что бесконечно малое не нуль; с другой же стороны, сумма конечной величины a с бесконечно малой есть опять a, что отождествляет бесконечно малое с нулем. Аналогично полностью отождествлялась кривая с вписанным в нее многоугольником, имеющим бесконечное число бесконечно малых сторон.

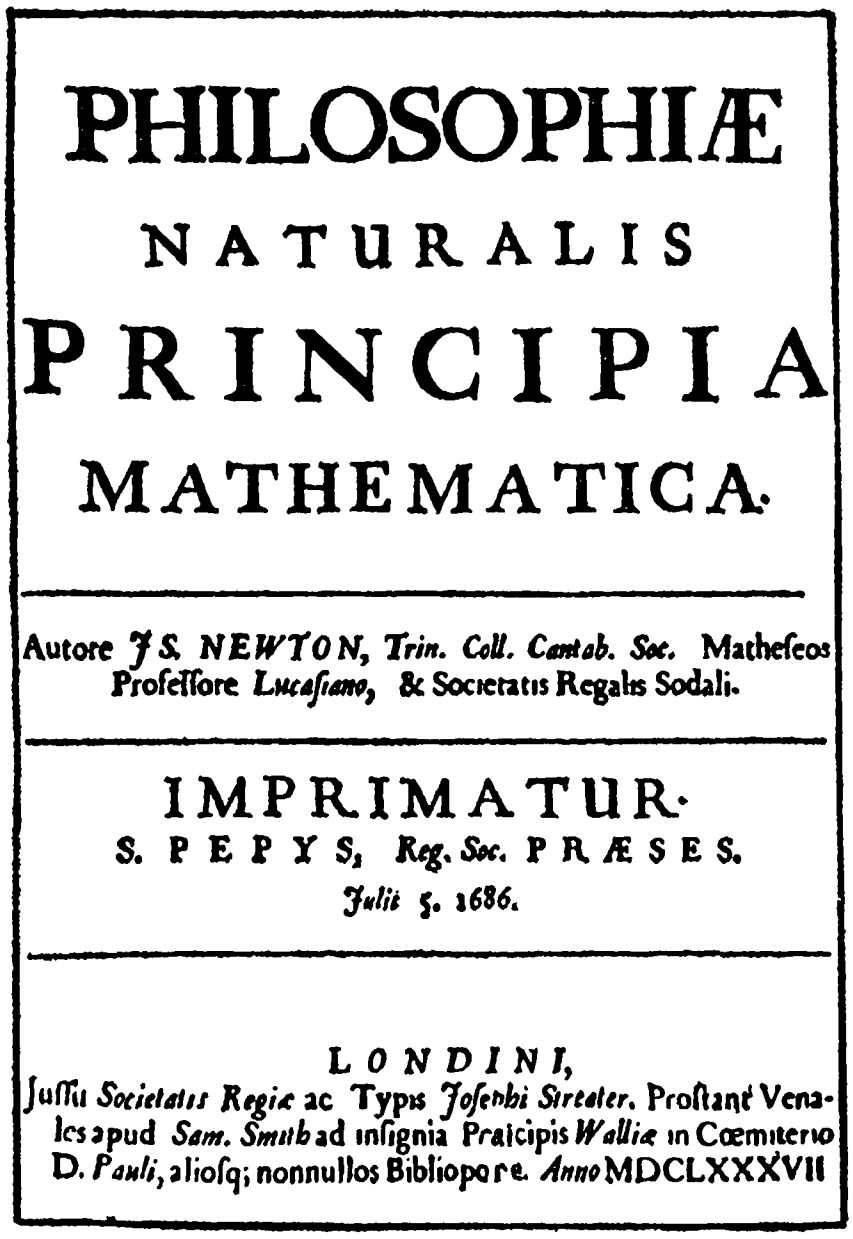
Таким образом, понятие бесконечно малых, которое являлось основой в анализе Лейбница, не отличалось четкостью и не было логически выдержанным. Следует отметить, что нечеткое представление о бесконечно малом и отсутствие логической безупречности в самих основах анализа в школе Лейбница вызывали на протяжении многих десятилетий резкую критику нового исчисления бесконечно малых в целом, несмотря на то, что оно давало замечательные результаты.

В отличие от школы Лейбница английская математическая школа придавала в ту эпоху большое значение вопросам обоснования анализа, несмотря на то, а возможно именно потому, что сам этот анализ развивался в Англии менее бурно, чем на континенте, особенно в XVIII в. Сначала Ньютон сам употреблял неделимые, бесконечно малые и оперировал ими. Однако постепенно убедился в недостаточной строгости понятия бесконечно малого и стремился к полному изгнанию его из анализа, разработав *теорию пределов*, названную им «методом первых и последних отношений». Этот метод был изложен в нескольких его трудах, в том числе и в «Трактате о квадратуре кривых» (1704), а до этого в вышедшем в 1685 г. знаменитом его произведении «Математические начала натуральной философии» (рис. 4), том самом, в котором были изложены основные законы классической механики и учение о всемирном тяготении. Из «Начал» Ньютона и берет свое происхождение термин «предел» и символ lim (от латинского слова *limes* — предел) Что же касается самого понятия предела, то, по мнению профессора А. П. Юшкевича, оно у Ньютона носит еще нечеткий, двойственный характер. В трудах Ньютона, с одной стороны, имеются высказывания, свидетельствующие о том, что он понимал «неделимые», т. е. бесконечно малые, как переменные величины, пределом которых служит нуль, однако в других местах своих произведений он не всегда придерживался этого взгляда и поэтому не сумел стать на путь уточнения и последовательного применения понятия предела и согласовать его с понятием бесконечно малого.

Академик А. Н. Крылов высоко оценивал метод пределов Ньютона. Более высокую оценку этому методу дал академик Н. Н. Лу-

зин. Академик А. Н. Колмогоров утверждает[1], что Ньютон еще был далек от современной строгой теории пределов и «понятие предела (как и понятие скорости) является для Ньютона одним из исходных понятий, не подлежащих в силу их примитивного характера и интуитивной ясности прямому определению. Однако во всех своих утверждениях о свойствах пределов и способах их нахождения Ньютон вполне точен и ни в чем не расходится с нашими современными представлениями».

Соотечественники Ньютона защищали его метод пределов, выступая с резкой полемикой против школы Лейбница, однако защитники и последователи Ньютона в подавляющем своем большинстве сами не поняли существа его метода. Метод пределов Ньютона подвергался критике на его родине и за ее пределами.


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Justu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostant Venales apud *Sam. Smith* ad insignia Principis *Walliæ* in Cœmiterio D. *Pauli*, aliosq; nonnullos Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII

Рис. 4. Титульный лист первого издания «Начал» И. Ньютона.

Несмотря на недостаточно разработанные в школах Лейбница и Ньютона основы исчисления бесконечно малых, оно в трудах Эйлера, Лагранжа и других ученых XVIII в. продолжало давать прекрасные результаты, позволяя решать многие из важнейших задач геометрии, механики, физики и прикладных наук. Многим этот факт казался в то время каким-то чудом. В 1774 г. Берлинская Академия наук даже объявила конкурс на четкое определение того, что в математике следует понимать под бесконечным, и на выяснение волновавшего всех вопроса о том, каким образом из противоречивых и логически невыдержанных предпосылок получаются такие замечательные, правильные и ценные результаты. Таким образом, в последние 2—3 десятилетия XVIII в. недостаточность логической основы, на которой было построено дифференциальное и интегральное исчисление, стала общеизвестной и общепризнанной. Наступил второй глубокий кризис основ математики[2].

---

[1] См.: Колмогоров. А. Н. Ньютон и современное математическое мышление.—В сб.: Московский университет — памяти И. Ньютона. М., 1946.

[2] Первый кризис имел место в V в. до н. э. в Древней Греции в связи с открытием несоизмеримости.

Полемика между представителями обеих школ способствовала выявлению слабых мест в основах построенных ими систем исчисления бесконечно малых и расчищала путь к правильному пониманию соответствующих идей.

Большую роль в этом деле сыграли статьи французского ученого и просветителя Ж. Даламбера, опубликованные в 60-е и 70-е годы XVIII в. во французской «Энциклопедии». В ее IX томе, изданном в 1765 г., в статье «Limite» (предел) Даламбер писал: «Одна величина является пределом другой, если эта вторая может стать к первой ближе, чем на любую данную величину, как бы мала ни была эта последняя». По существу это первое в истории математики определение предела последовательности. Одним из недостатков его является отсутствие оговорки о том, что предел должен быть постоянной величиной. В своем определении предела, данном в «Опыте об усовершенствовании элементов геометрии» (1798), академик С. Е. Гурьев подчеркивает, что предел — это постоянная. В вышеуказанной статье Даламбер излагает некоторые правила действий с пределами; он, например, указывает, что предел произведения двух величин равен произведению их пределов. Значение Даламбера в рассматриваемом вопросе состоит главным образом в том, что он первый попытался учение о пределах положить в основу дифференциального и интегрального исчисления как действующее орудие при его развертывании.

Другой французский математик, член Парижской Академии наук Лазар Карно, известный также как крупный политический и военный деятель («организатор победы») французской буржуазной революции конца XVIII в., опубликовал в 1797 г. свои «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых», выступая как решительный защитник идей Лейбница. Для Карно бесконечно малое — это не фикция, не метафизическое, а вполне реальное понятие. Творению Лейбница Карно отдает предпочтение, однако он вовсе не отвергает метод Ньютона и старательно развивает мысль о том, что метод исчерпывания, метод неделимых и теория пределов Ньютона — все эквивалентны методу бесконечно малых Лейбница. Несмотря на то что на размышлениях Карно по поводу бесконечно малых лежит тот же отпечаток двойственности и нечеткости, который характерен почти для всех математиков XVIII в., значение его книги состоит среди других в том, что она в определенной мере подготовила почву для объединения идей Лейбница и Ньютона, для осуществления синтеза двух понятий: бесконечно малого и предела. Этот синтез был реализован в XIX в.

10. Понятие предела — фундамент математического анализа в XIX в.

Длительный период перехода от понятия актуально бесконечно малой к понятию потенциально бесконечно малой сопровождался преодолением больших трудностей и борьбой взглядов на основы

нового и сильнейшего математического орудия — исчисления бесконечно малых — вплоть до 20-х годов XIX в. В своих лекциях по математическому анализу, прочитанных в Политехнической школе Парижа, и затем в опубликованных книгах «Курс анализа» (1821), «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (1823), «Лекции по приложениям анализа к геометрии» (1826—1828) крупный французский математик Огюстен Луи Коши (1789—1857) систематически развивает теорию пределов как надежное действенное средство для строгого построения математического анализа.

А Я Хинчин

Опираясь на богатое математическое наследие ученых XVIII в., которые в деле обоснования полученных ими результатов вплотную подошли к правильному решению Коши, Больцано и другие ученые первой половины XIX в. сумели окончательно преодолеть трудности, о которых говорилось в предыдущем параграфе, и предложили рассматривать бесконечно малую величину не с точки зрения ее *размеров* (до того ли она мала, что равна или не совсем равна нулю), а как величину, находящуюся в процессе изменения, *неограниченного убывания*. Коши уже вполне четко говорит о том, что бесконечно малой называется переменная величина, которая на известной стадии своего изменения *становится* и затем всегда *остается* по абсолютному значению меньше любого положительного числа, т. е. сколь угодно малой.

Вот как определяет Коши понятие предела: если значения, последовательно приписываемые одной и той же величине, неограниченно приближаются к фиксированному значению так, что с некоторого момента отличаются от него сколь угодно мало, то это последнее называется пределом всех остальных.

В предисловии к «Дифференциальному исчислению» Эйлер, как и некоторые другие ученые XVIII в., тоже довольно отчетливо говорит о понятии предела, однако никто из этих ученых не пользуется в своих трудах этим понятием как действенным орудием для обоснования и построения дифференциального и интегрального исчисления. Это сделали Коши и другие ученые первой половины XIX в., это они сделали из понятия бесконечно малой, из понятия предела фундамент для построения математического анализа. Многие теоремы, относящиеся к обоснованию анализа, были впервые установлены, но не опубликованы во времена Бернардо Больцано (1781—1848). Так, в своем произведении «Чисто аналитическое доказательство», написанном в 1817 г., он за 4 года до Коши вывел необходимое условие сходимости последовательности; в том же

произведении он доказал предложение, по существу совпадающее с так называемой ныне «теоремой Больцано — Вейерштрасса», которую Карл Вейерштрасс (1815—1897) установил лишь в начале 60-х годов прошлого столетия.

Сам термин «бесконечно малая», происхождение которого связано с понятием и термином «неделимое», уже более века является анахронизмом. «Его следовало бы заменить, — как пишет А. Я. Хинчин, — термином *безгранично убывающая* или другим аналогичным»[1].

Несмотря на четкое определение понятия предела в первой половине XIX в., в нем оставался значительный пробел — не хватало строго математического обоснования понятия действительного числа, не была установлена непрерывность множества действительных чисел. Этот пробел был заполнен лишь во второй половине XIX в., после того как была создана теория вещественных чисел. Без этой теории ни определение предела, ни теоремы, основанные на этом понятии, не имели определенного, точного смысла, так как осталось невыясненным, о каких именно числах шла речь — натуральных, рациональных, действительных. Чтобы можно было говорить о последних, надо точно знать, что такое действительное число, т. е. нужно опираться на строгую теорию вещественных чисел, которой в первой половине XIX в. еще не было.

Построение этой теории во второй половине XIX столетия продвинуло вперед весь процесс арифметизации анализа и формализации математики в целом. В частности, описание реального процесса изменения переменной или убывания бесконечно малой заменяется формальным указанием на поведение переменных, о которых идет речь. Вводится так называемый аппарат «ε—δ». И если в первой половине XIX в. обычно говорили, что «переменная величина x имеет своим пределом число a, если x в процессе своего изменения принимает значения, приближающиеся к a сколь угодно близко», или что «в процессе изменения x найдется такой момент, начиная с которого все значения этой переменной отличаются от a на сколь угодно малую величину», то во второй половине прошлого столетия формулировки строятся таким образом, что, сохраняя идейную сущность предела, из них исключаются описания процесса предельного перехода, которые заменяются формальным выдвижением идеи *соответствия*. Так, например, в данном выше определении предела математически уточняется смысл выражения «момент в изменении переменной»; это выражение заменяется другим. Если речь идет о последовательности

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots, \qquad (1)$$

уточнение и замена терминов сводится к тому, что «момент в изменении переменной» означает определенный номер N члена (1).

---

[1] См.: Хинчин А. Я. Основные понятия математики в средней школе. М., 1961, с. 71.

Определение предела последовательности звучит по-новому так: *число a называется пределом последовательности* (1), *если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* N, *что для всех членов последовательности с номерами* $n > N$ *выполняется неравенство*:

$$| a_{n-1} - a_n | < \varepsilon.$$

Если речь идет о пределе функции, то «момент в изменении переменной» x, стремящейся к x_0, заменяется разностью по абсолютному значению между x и x_0. Определение предела функции таково: *число a называется пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to x_0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, что при $|x - x_0|$ выполняется $|y - a| < \varepsilon$. Записывается:

$$\lim_{x \to x_0} y = a.$$

В курсах анализа встречается и такая формулировка: a есть предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если сколь бы мало не было $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что всякий раз, когда $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|y - a| < \varepsilon$[1].

Современное определение предела на «языке ε, δ» встречается уже в 1880 г. у немецкого математика К. Вейерштрасса, автора одного из вариантов теории вещественных чисел.

Некоторые авторы учебных руководств, желая подчеркнуть связь между понятиями предела функции и предела последовательности, говорят о пределах двух следующих последовательностей: предел x_0 любой последовательности значений аргумента x и предел a последовательности соответствующих значений функции y. Тогда a называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если из

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad (x_n \neq x_0)$$

следует[2]:

$$\lim_{n \to \infty} y_n = a,$$

что коротко записывается так:

$$\lim_{x \to x_0} y = a.$$

---

[1] При выводе, например, равенства $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ следует обратить внимание учащихся на то, что это равенство имеет место лишь в радианной мере, если число x — мера угла.

[2] Этот охват и смещение двух разновидных предельных переходов при определении понятия функции вызывает зачастую трудности у учащихся. В последовательности переменная n безгранично возрастает и принимает лишь целые положительные значения, в то время как *в общей функции* $y = f(x)$ переменная x стремится к конечному пределу и принимает непрерывный ряд, вообще говоря, вещественных значений.

Конечно, все числа a, x_0, ε, δ и т. д. — это вещественные числа. Таким образом, во второй половине XIX в. было уточнено и формально, строго математически определено понятие предела. Полная арифметизация анализа привела к преодолению кризиса оснований математики.

В XX в. концепция предела подверглась значительному обобщению. Помимо предела комплексного числа, были введены понятия предела случайной величины, многомерного вектора и других математических объектов. В отношении предела функции стали отличать простую сходимость от «равномерной» и «сходимости в среднем». Одновременно с этим произошел подъем на высшие ступени абстракции. Это привело к тому, что ныне в общем анализе, в топологии и других отраслях современной математики[1] предметом общего учения о пределе стала сама природа, структура предельных переходов независимо от объектов, на которые последние распространяются, подобно тому как в современной общей алгебре исследуются общие свойства самих операций над величинами, которые могут быть самого различного характера (числа, матрицы, вектора и т. п.).

Таков вкратце длинный и нелегкий путь формирования понятия предела.

11. О символе ∞

Символ бесконечности (∞), имеющий вид «лежащей восьмерки», встречается впервые в напечатанном в 1665 г. главном труде Валлиса — «Арифметика бесконечных величин» Что побудило Валлиса к введению именно этого символа для понятия бесконечности, неизвестно. Некоторые историки предлагают такое объяснение: знак $\subset\!\!|\supset$, близкий к ∞, встречается среди ранних римских цифр для обозначения тысячи, которое отождествлялось одно время с понятием «очень много». Такое «объяснение» кажется малоубедительным. Действительно, ведь уже примерно за 200 лет до Валлиса у Шюке встречаются числа значительно больше миллиона, и вряд ли в XVII в. такой крупный математик, каким был Валлис, мог думать о тысяче как о числе, которое можно ассоциировать с понятием бесконечности. Мы считаем, что символ ∞, представлявшийся Валлису как два связанных между собой нуля, был противопоставлен им символу нуля (0) в связи с приведенными им же равенствами:

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0. \tag{1}$$

Впрочем, если Валлис был бы учеником в наше время, ему за равенства (1) досталось бы от учителя... Дело в том, что, как мы

---

[1] Большое значение в развитии современной концепции предела имеют труды советских ученых А. Я. Хинчина, П. С. Александрова, А. Н. Колмогорова, Б. В. Гнеденко и др.

уже знаем, взгляд на бесконечность как на (постоянное) число претерпел после Валлиса коренную ломку. Для предотвращения грубых ошибок учащиеся должны знать и помнить, что и символ ∞ не означает какого-либо числа и не имеет никакого смысла, если он взят сам по себе. Крупный советский математик и педагог А. Я. Хинчин писал: «Смысл получает только выражение: окрестность $+\infty$», и под этим выражением разумеется совокупность всех вещественных чисел, превышающих некоторое (любое) число a; иметь для такой совокупности краткое наименование очень удобно, так как с совокупностями такого рода мы в анализе встречаемся на каждом шагу. Но вместе с выражением «окрестность $+\infty$» тотчас же получают смысл и такие выражения, как $\lim\limits_{x \to a} y = +\infty$ (где само a может также быть одним из символов $+\infty$ и $-\infty$); в самом деле, в данном нами определении предела $\lim\limits_{x \to a} y = b$, о буквах a и b упоминается исключительно в связи с их окрестностями; поэтому любая из этих букв может быть со смыслом заменена символом $+\infty$ (или $-\infty$) после того, как мы установили, какие множества мы называем окрестностями этого символа; при этом нет надобности приписывать какой-либо смысл самому этому символу.

Из всего этого ясно, с какой осторожностью необходимо относиться к употреблению символов $+\infty$ и $-\infty$; в частности, совершенно недопустимо применять к ним какие-либо арифметические операции ($\frac{1}{\infty} = 0$ и т. п.), как это принято в некоторых «упрощенных» курсах анализа. Равным образом лишены смысла и всякого рода равенства, в которых символ $+\infty$ или $-\infty$ выступает не в прямо указанной роли предела, как, например, распространенные в тригонометрии записи вида $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \pm \infty$[1] и т. п. Напротив, неравенствам вида $a < +\infty$, $b > -\infty$, $-\infty < c < +\infty$ придается определенный смысл: они последовательно означают: 1) что a есть любое число либо символ $-\infty$; 2) что b есть любое число либо символ $+\infty$; 3) что c есть число.

В своем «Дифференциальном исчислении» (изд. 2, 1949, с. 81) академик Н. Н. Лузин пишет, что употребление символа бесконечности «нередко сопровождается огромной опасностью, потому что влечет за собой у лиц, не приобревших опыта в математических рассуждениях, нескончаемые неясности, иллюзии, недоразумения, парадоксы и очень часто приводит к грубейшим ошибкам при числовых выкладках.

---

[1] Правильная формулировка, конечно, такова: $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2} - 0\right)} \operatorname{tg} x = +\infty$,

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + 0\right)} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Первоосновой всех этих недоразумений является то бессознательно вкрадывающееся в еще неопытный ум искушение, которое приглашает нас считать эти символы числами».

Однако профессор А. И. Маркушевич обратил внимание педагогов на то, что из современного состояния науки не вытекает категорический отказ от сближения понятия бесконечности с числами; он привел пример трактовки бесконечности как числа, правда не собственного[1].

12. О понятии непрерывности

Корни представления о непрерывности функции следует искать в происходящих в природе движениях (движении небесных тел, течении воды и пр.) и в рассматривании линий и других геометрических образов как непрерывных фигур. Интуитивно мы считаем функцию непрерывной, если ее график есть плавная, нигде не прерывающаяся линия.

С понятием непрерывности, тесно связанным с идеей бесконечности, в той или иной мере сталкивались еще древнегреческие философы и математики. В частности, открытие несоизмеримости обратило внимание ученых V в. до н. э. на то, что геометрические объекты — это величины более общей природы, чем известные в те времена положительные рациональные числа. Одной из проблем той эпохи было применение общей теории отношений Евдокса к исследованию непрерывных величин. Аристотель рассматривал две категории величин: 1) «раздельные», в которые входят числа, и 2) «сплошные», включающие длины, площади, объемы тел и др. Представление о скачкообразной природе числа в противовес непрерывному изменению величин, наблюдаемых в природе, сохранялось в математике на протяжении многих веков. Созданная после открытия несоизмеримости древняя геометрическая алгебра выдвинула отрезок прямой в качестве представителя непрерывно изменяющейся величины и внушила веру в непрерывность прямых и кривых линий, плоскостей и кривых поверхностей. Такие воззрения были унаследованы и учеными XVII—XVIII вв., рассматривавшими функции как непрерывные. Общий принцип непрерывности, встречаемый впервые у Кеплера, получил расплывчатую формулировку у Лейбница: «Если среди данных или принятых явлений различие двух явлений может стать меньше всякой данной величины, то она вместе с тем необходимо станет меньше всякой данной величины и у искомых или последующих, вытекающих из данных»[2].

---

[1] См.: Маркушевич А. И. Символ бесконечности и его употребление в математике. — Математика в школе, 1948, № 1 (далее: МШ). Бесконечность как число рассматривал и Г. Кантор, который ввел так называемые «трансфинитные» числа.

[2] См.: Розенфельд Б. А. Аналитический принцип непрерывности в геометрии. Историко-математические исследования. М., 1965, вып. XVI (далее: ИМИ).

Чисто геометрические представления о функции у Декарта, Лейбница и его последователей, как и соответствующее представление о непрерывности, опирались на образ плавной кривой. Ньютон называл функции *флюэнтами*, т. е. *текущими*, зависящими от времени, переменными величинами. Таким образом, у него функции по определению непрерывны.

Эйлер кое-где в своих работах ссылается, как это систематически делал Лейбниц, на «закон непрерывности». Вообще же Эйлер пишет, что «любая функция от x будет давать некоторую линию, прямую или кривую... и, обратно, кривые линии можно сводить к функциям»[1], и соответственно этому взгляду классификации функций он сводит к классификации кривых. Во «Введении в анализ» Эйлер делит кривые на непрерывные и прерывные (разрывные). Он пишет: «Непрерывная линия строится так, что ее природа выражается с помощью одной определенной функции от x. Но если кривая линия построена таким образом, что различные части ее BM, MD, DM и т. д. выражаются с помощью различных функций x, так что одна часть ее BM определяется с помощью одной функции, тогда как другая часть MD описывается другой функцией и т. д., то этого рода кривые линии мы будем называть *прерывными* или *смешанными* и *неправильными*, так как они не образуются на основе единого неизменного закона, а составляются из частей различных непрерывных кривых.

В геометрии речь идет главным образом о непрерывных кривых, и ниже будет показано, что те кривые, которые описываются механически однообразным движением согласно некоторому неизменному правилу, выражаются также с помощью одной функции и, стало быть, являются непрерывными». Итак, понятие непрерывности здесь еще связывалось с возможностью выразить функцию единым аналитическим выражением и, значит, не совпадает с современным[2]. Появившийся у Эйлера аналитический принцип непрерывности нашел впоследствии широкое применение как в геометрии Карно, Понселе и Лобачевского, так и в современной геометрии.

Лишь в 1823 г. Коши, вводя понятие предела переменной величины, дает знакомое нам из современных учебников определение понятия непрерывности функции. Еще до Коши строгое определение непрерывности функции дал чешский математик Б. Больцано. Определение Больцано почти полностью совпадает с определением Коши. Однако, как уже было сказано, труды Больцано не были опубликованы вовремя и стали известны значительно позже работ Коши.

---

[1] См.: Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. М., 1961, т. I, II, с. 21.

[2] По существу под «непрерывными» Эйлер понимал функции, ныне называемые «аналитическими», а под «прерывными» (разрывными) — произвольные непрерывные, неаналитические или кусочно-аналитические разрывные функции.

В вышедшей в свет в 1851 г. известной работе Больцано «Парадоксы бесконечного» содержится среди других и следующее предложение, известное ныне под названием «теоремы Больцано»: непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция переменного x, положительная при некотором значении x и отрицательная при некотором другом значении x этого отрезка, должна превращаться в нуль при некотором промежуточном значении x. Теорема Больцано вполне согласуется с нашим интуитивным представлением о непрерывной кривой, которая, переходя с одной стороны оси x на другую сторону, должна пересечь эту ось в некоторой ее точке.

Будучи тесно связана с понятиями функции и предела, понятие непрерывности в дальнейшем тоже подвергалось уточнению и расширению. Одно из обобщений понятия непрерывности вводится при изучении топологических пространств.

§ 2. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Из всех теоретических успехов знания вряд ли какой-нибудь считается столь высоким триумфом человеческого духа, как изобретение исчисления бесконечно малых во второй половине XVII века.

Ф. Энгельс

13. Происхождение понятия производной. Мгновенная скорость движения

Ряд задач дифференциального исчисления был решен еще в древности. Ниже (18) мы разберем одну из этих задач у Евклида. Ряд таких задач был решен Архимедом, разработавшим способ проведения касательной, примененный им к спирали, но применимый для других кривых. Основное понятие дифференциального исчисления — понятие призводной — возникло в XVII в. в связи с необходимостью решения ряда задач из физики, механики и математики, в первую очередь следующих двух: определения скорости прямолинейного неравномерного движения и построения касательной к произвольной плоской кривой.

Займемся первой из них.

Путь s, пройденный прямолинейно и неравномерно движущейся точкой, есть функция от времени t. Пусть это движение выражается некоторым законом

$$y = f(t) \tag{1}$$

и требуется найти скорость движения в момент t_1. Если t_1 и t_2 являются двумя различными значениями аргумента t, а s_1 и s_2 — соответствующими им значениями функции s, то «средняя» скорость $v_{ср}$ движения за промежуток времени $t_2 - t_1$ выразится так:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}. \tag{2}$$

Чем ближе будет t_2 к t_1, т. е. чем короче промежуток времени $t_2 - t_1$, тем точнее эта формула определит скорость в мгновение t_1. Поэтому естественно принять за мгновенную скорость v движущейся точки в момент t_1 предел, к которому стремится средняя скорость $v_{\text{ср}}$ точки, когда промежуток времени $t_2 - t_1$ стремится к нулю, или, что то же самое, когда t_2 стремится к t_1. Итак,

$$v = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}. \tag{3}$$

Эта задача была впервые решена Ньютоном[1]. Функцию он назвал *флюэнтой*, т. е. *текущей величиной* (от латинского fluere — течь), производную же — флюксией (от того же fluere). Ньютон обозначал функции последними буквами латинского алфавита u, x, y, z, а их *флюксии*, т. е. производные от флюэнт по времени, — соответственно теми же буквами с точкой над ними: $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. Вот один пример того, как Ньютон находил производные.

Пусть дано следующее соотношение между флюксиями:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0 \tag{4}$$

и требуется найти соотношение между флюэнтами.

Отметим, что x, y, как и все флюэнты Ньютона, зависят от времени t (своего рода универсального аргумента). Его правило дифференцирования состоит в том, что каждый член равенства (4), содержащий x (или y), умножается на показатель степени x (или y), а один из множителей x (или y) заменяется на флюксию x (соответственно y) и т. д. Тогда искомое соотношение между флюксиями представится так:

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + axy - 3y^2\dot{y} = 0. \tag{5}$$

Для доказательства своего правила Ньютон, следуя в основном Ферма, рассматривает бесконечно малое приращение времени dt, которое он обозначал знаком $\boldsymbol{O}$, отличным от нуля, и подставлял в равенство (4): $x + \dot{x}\boldsymbol{O}$ (т. е. $x + dx$) вместо x, $y + \dot{y}\boldsymbol{O}$ $(y + dy)$ вместо y. Выражение $\dot{x}\boldsymbol{O}$, обозначаемое ныне $x'(t)dt$ и называемое дифференциалом (dx), Ньютон называл *моментом*. После почленного вычитания, сокращения на $\boldsymbol{O}$ и отбрасывания членов, содержащих множитель $\boldsymbol{O}$, он получает соотношение (5). Обосновывая отбрасывание бесконечно малых высшего порядка, Ньютон пишет: «... так как мы предположили $\boldsymbol{O}$ бесконечно малой величиной... то члены, на нее умноженные, можно считать за ничто в сравнении

---

[1] О некоторых предшественниках Ньютона и его произведении «Метод флюксий» см. § 7.

с другими». Других пояснений относительно характера своего бесконечно малого Ньютон здесь не дает.

Формально это отбрасывание бесконечно малых недопустимо, однако практически оно ведет к тем же результатам, которые получаем и мы теперь, используя предельный переход. Объясняется это тем, что отношение приращения функции к приращению аргумента при неограниченном убывании приращения независимой переменной на известном этапе *практически* уже не меняется.

Ньютон пришел к понятию производной, исходя из вопросов механики. Свои результаты в этой области он изложил в трактате, названном им «Метод флюксий и бесконечных рядов», который был составлен около 1671 г. Предполагают, что Ньютон открыл свой метод флюксий еще в середине 60-х годов XVII в., однако вышеназванный его трактат был опубликован посмертно лишь в 1736 г.

4. Путь к производной через касательную к кривой

Математиков XV—XVII вв. долго волновал вопрос о нахождении общего метода для построения касательной в любой точке кривой. Задача эта была связана также с изучением движений тел и с отысканием экстремумов наибольших и наименьших значений разных функций.

Некоторые частные случаи решения задач были даны еще в древности. Так, в «Началах» Евклида дан способ построения касательной к окружности, Архимед построил касательную к спирали, носящей его имя, Аполлоний — к эллипсу, гиперболе и параболе. Однако древнегреческие ученые не решили задачу до конца, т. е. не нашли общего метода, пригодного для построения касательной к любой плоской кривой в произвольной ее точке.

С самого начала XVII в. немало ученых, в том числе Торричелли, Вивиани, Роберваль, Барроу, пыталось найти решение вопроса, прибегая к кинематическим соображениям. Первый общий способ построения касательной к алгебраической кривой был изложен в «Геометрии» Декарта. Более общим и важным для развития дифференциального исчисления был метод построения касательных Ферма.

Основываясь на результатах Ферма и некоторых других выводах, Лейбниц значительно полнее своих предшественников решил задачу, о которой идет речь, создав соответствующий алгорифм.

Пусть

$$y = f(x) \qquad (1)$$

является уравнением некоторой кривой (рис. 5), и пусть требуется построить касательную к этой кривой в какой-нибудь ее точке $M(x_1; y_1)$. Для решения задачи, очевидно, достаточно узнать наклон касательной, т. е. угол φ, образованный ею с осью абсцисс.

Рассмотрим некоторую точку $N(x_2; y_2)$, расположенную на кри-

вой вблизи точки M, и проведем секущую NM, образующую угол α с осью абсцисс. Проведя $MK \parallel OA$, получаем прямоугольный треугольник MKN, в котором угол NMK равен α. Таким образом,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{KN}{MK} = \frac{BN - BK}{AB} =$$

$$= \frac{BN - BK}{OB - OA} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (2)$$

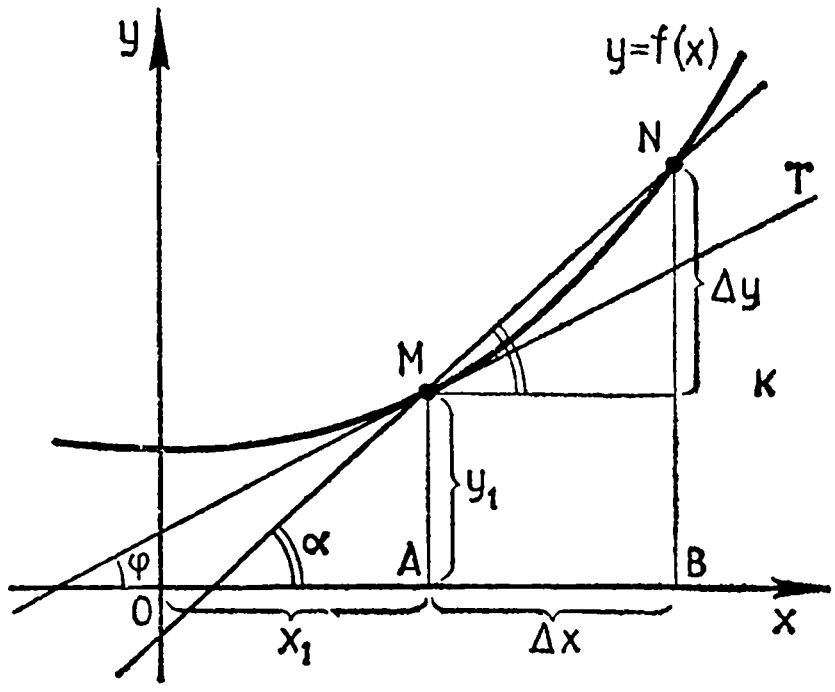


Рис. 5.

По мере того как точка N приближается по кривой к точке M, секущая NM, поворачиваясь вокруг точки M, все больше приближается к некоторой прямой MT, которая и есть (по определению) касательная к кривой в ее точке M. Угол же α стремится при этом к углу φ. Все это имеет место, когда разность $x_2 - x_1$ стремится к нулю, т. е. x_2 стремится к x_1.
Итак,

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim \operatorname{tg}\alpha = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (3)$$

Таким образом, задача нахождения $\operatorname{tg}\varphi$, т. е. углового коэффициента касательной в точке M к плоской кривой, определяемой функцией $y = f(x)$, сводится к нахождению производной функции y по независимой переменной x при данном ее значении (или в данной точке) $x = x_1$.

Можно привести и другие примеры, показывающие, какую большую роль играет понятие производной в науке и технике. Ускорение есть производная от скорости по времени, теплоемкость тела есть производная от количества тепла по температуре, скорость радиоактивного распада есть производная от массы радиоактивного вещества по времени и т. п. Изучение свойств и способов вычисления производных и их применение к исследованию функций составляет главный предмет *дифференциального исчисления*.

Первая печатная работа по дифференциальному исчислению была опубликована Лейбницем в 1684 г. Это был мемуар, появившийся в основанном им же в 1682 г. математическом журнале «Acta Eruditorum» (прототип «Ученых записок») и озаглавленный «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не являются препятствием дробные и иррациональные количества, и особый для этого род исчисления». В этой статье, состоящей всего лишь из 6 страниц, содержится изложение существа метода исчисления бесконечно малых, в частности излагаются основные правила дифференцирования. Итак, если в «Методе флюк-

сий» Ньютона в качестве первоначального понятия фигурирует *скорость*, то в «Новом методе» Лейбница таким понятием является *касательная*[1].

15. Символы и термины

Приращение абсциссы, т. е. «бесконечно малую» разность $x_2 - x_1$, Лейбниц обозначал через dx (d — первая буква в латинском слове *differentia* — разность), соответствующее приращение ординаты $y_2 - y_1$ — через dy. Ввиду того что «бесконечно малая часть, на которую непрерывно увеличивается или уменьшается переменная величина, называется ее дифференциалом[1]», то у Лейбница дифференциал dx выражает значение величины AB (рис. 5), а дифференциал dy — значение KN. Ныне употребляемый символ производной $\frac{dy}{dx}$ берет свое начало от Лейбница. У Лейбница основным понятием была не производная, для которой он даже специального термина не имел, а дифференциал.

В середине XVIII в. Эйлер стал пользоваться греческой буквой Δ для обозначения приращений переменных величин, т. е. $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$ и т. д. Это обозначение сохранилось поныне. Мы пишем:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Обозначения y' и $f'(x)$ для производной ввел Лагранж.

Сам термин «производная» (перевод французского слова *derivée*) впервые встречается у француза Луи Арбогаста в его книге «Вычисление производных», опубликованной в Париже в 1800 г. Этим термином сразу же стал пользоваться и Лагранж. Термин этот быстро вошел в общий обиход, а Коши, используя начальную букву этого термина, стал обозначать производную символом Dy или $Df(x)$.

Терминология Ньютона (флюэнты, флюксии) и его символы производной утратили свое значение. Лишь в физике и механике в некоторых случаях обозначают точками над буквами производные по времени.

16. Формулы дифференцирования у Лейбница и Эйлера и дефекты в их логическом обосновании

Первый печатный курс дифференциального исчисления вышел в свет в Париже в 1696 г. под заглавием «Анализ бесконечно малых». Его автор Г. Ф. де Лопиталь[2] за основу этой книги взял

---

[1] Подробнее о работах Лейбница см. § 7.

[2] См.: Лопиталь Г. Ф. Анализ бесконечно малых. М.—Л., 1935, с. 62.

рукопись Иоганна Бернулли, одного из ближайших сотрудников Лейбница. Вот почему этот курс следует рассматривать как типичное произведение школы Лейбница.

В первой же главе своей книги Лопиталь требует, «чтобы величина, увеличенная или уменьшенная на другую бесконечно малую величину, могла быть рассматриваема как неизменившаяся». Тут бесконечно малая рассматривается как нуль, ее можно отбрасывать. Это один из фундаментальных принципов исчисления бесконечно малых Лейбница, ныне отвергнутый наукой. Этим принципом пользуется Лопиталь и при установлении формул дифференцирования.

Вот, например, как выводится дифференциал произведения двух величин xy.

Когда x становится $x + dx$, то y становится $y + dy$ и, следовательно, xy становится $(x + dx)\ (y + dy) = xy + ydx + xdy + dxdy$. Дифференциал xy, т. е. разность, будет тогда $xy + ydx + xdy + dxdy - xy = ydx + xdy + dxdy$. Но последний член есть величина, бесконечно малая по сравнению с другими двумя членами: ydx и xdy; действительно, если разделим, например, ydx и $dxdy$ на dx, то найдем, с одной стороны, y, а с другой — dy, являющийся дифференциалом y и, следовательно, бесконечно меньший, чем y.

Отсюда следует, что

$$d(xy) = ydx + xdy. \qquad (1)$$

Так же устанавливает эту формулу и Эйлер в своем «Дифференциальном исчислении». Результат этот верен и аналогичен нашей формуле

$$(xy)' = yx' + xy'. \qquad (2)$$

Однако, в то время как формула (2) выводится строго с помощью предельного перехода, результат (1) дан без строгого обоснования. С одной стороны, бесконечно малые dx и dy не нули, а с другой — их можно отбрасывать как нули. Такие противоречия вызывали в XVII—XVIII вв. недоумения и резкую критику метода исчисления бесконечно малых.

В первый период разработки математического анализа основоположники этой теории не могли достаточно четко и ясно обосновать принципы этой теории и поэтому искали подтверждения правильности теории в согласованности математических выводов с опытом, с практикой при решении задач механики и астрономии. Однако простая проверка гипотезы на практике не дает абсолютной уверенности в ее непогрешимости. Достаточно одного факта, не согласующегося с данной гипотезой, как она будет опровергнута. Вот почему на последующих этапах перед математиками возникла проблема строгого математического обоснования теории математического анализа.

17. Производная и дифференциал

В настоящее время «дифференцирование» понимают как вычисление дифференциалов функций, так и нахождение производных функций. Это своего рода недостаток терминологии, ибо дифференциал и производная — это не тождественные понятия. Под дифференциалом функции ныне понимают произведение производной на приращение аргумента:

$$dy = y'(x)\,\Delta x, \text{ или } dy = y'(x)\,dx, \tag{1}$$

$$\text{так как } dx = \Delta x.$$

Не таков был смысл дифференциала при его возникновении. Лопиталь определял его как бесконечно малое приращение, т. е. как ту величину, которую мы обозначаем через Δy. На рисунке 6 видно геометрическое истолкование дифференциала dy. Из прямоугольного треугольника MNK следует:

$$NK = MN \cdot \operatorname{tg}\alpha, \tag{2}$$

где MN представляет приращение аргумента, т. е. Δx, а $\operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент касательной в точке M, как мы уже знаем, есть производная $y'(x)$. Подставляя эти значения в (2), получаем:

$$NK = y'(x) \cdot dx = dy. \tag{3}$$

Таким образом, Δy представляет собой отрезок NM_1 — приращение *ординаты кривой*, а dy — отрезок NK, приращение *ординаты касательной*.

Понятие дифференциала и сам термин берут свое начало от Лейбница. Последний, однако, не дал точного определения дифференциалу.

Исходя из первоначального для него понятия дифференциала, Лейбниц рассматривал и частные двух соответствующих дифференциалов, т. е. производные. Лишь со времен Коши, впервые ясно определившего производную как предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$, понятие производной стало фундаментальным в дифференциальном исчислении, а понятие дифференциала определяется на основе производной.

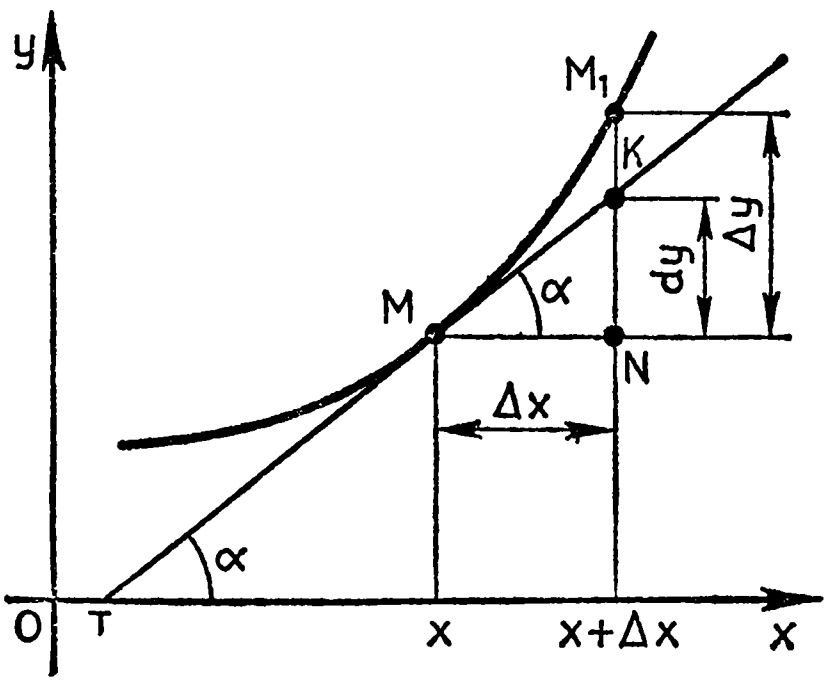


Рис. 6.

18. Максимумы и минимумы. Об одной задаче Евклида

Латинские слова maximum и minimum означают соответствен-

но «наибольшее» и «наименьшее» значение. Некоторыми частными вопросами отыскания наибольших и наименьших значений геометрических величин занимались еще древнегреческие математики.

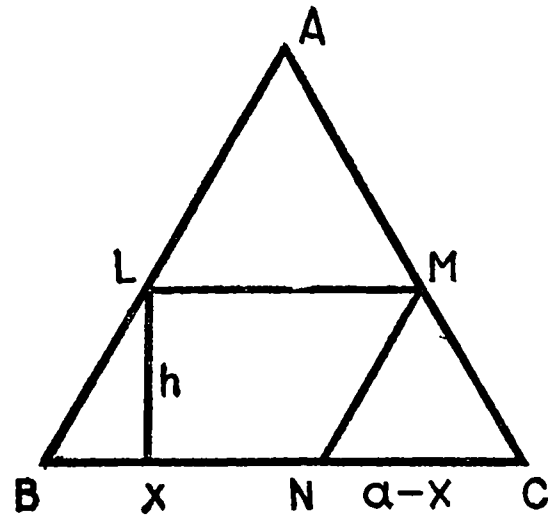


Рис. 7.

Вот один пример из «Начал» Евклида.

В 27-м предложении VI книги Евклид доказывает (чисто геометрически) предложение, содержание которого сводится к следующему: из всех параллелограммов, вписанных в данный треугольник, наибольшую площадь имеет тот, основание которого равно половине основания треугольника. В современных терминах задача решается следующим образом.

Пусть ABC — треугольник (рис. 7), в который вписан параллелограмм $BLMN$, основание которого $BN = x$. Обозначим через h высоту параллелограмма, площадь S последнего выразится формулой

$$S = h \cdot x. \tag{1}$$

Далее,

$$h = BL \cdot \sin B. \tag{2}$$

Пусть $BC = a$. Из подобных треугольников CMN и ABC имеем:

$$\frac{MN}{BA} = \frac{BL}{BA} = \frac{NC}{BC} = \frac{a-x}{a}.$$

Итак,

$$BL = \frac{BA}{a}(a-x), \tag{3}$$

откуда

$$h = \frac{BA}{a} \cdot \sin B \cdot (a-x).$$

Возвращаясь к (1), получим:

$$S = \frac{BA}{a} \cdot \sin B \cdot x(a-x). \tag{4}$$

Таким образом, сформулированная выше геометрическая задача сводится к определению максимума функции

$$y = x(a-x), \tag{5}$$

где a — постоянная. В настоящее время, исследуя функцию (5) с помощью производной, решаем уравнение $y' = a - 2x = 0$ и констатируем, что при $x = \frac{a}{2}$ имеем максимум.

Следует заметить, что в сочинении Архимеда «О шаре и цилиндре» решена более сложная, чем приведенная выше, задача нахождения максимума функции $x^2(a - x)$.

19. Максимумы и минимумы у Ферма

В начале нового времени разнообразные задачи естествознания, науки и техники требовали создания общего метода для нахождения наибольших и наименьших значений величин. Уже Кеплер в своей «Стереометрии винных бочек» (1615) высказал идею о том, что вблизи максимума величины изменения ее незаметны, предвосхитив таким образом идею приравнивания нулю производной при отыскании максимума[1]. Первый систематический прием для отыскания экстремумов[2] изложил П Ферма в своей работе «Метод исследования максимумов и минимумов». Эта работа была частично опубликована в 1642—1644 гг., а полностью — в 1779 г., после смерти ее автора. Из писем Ферма стало, однако, известно, что своим методом он владел уже в 1629 г.

Этот метод, кстати сказать совпадающий с тем, посредством которого Ферма находил касательные к кривым, имеющий инфинитезимальный характер (т. е. основанный на рассмотрении бесконечно малых), Ферма впервые применил к функции

$$x(a - x), \tag{1}$$

к которой приводит изложенная в предыдущем номере задача Евклида. Пусть h есть бесконечно малое приращение назависимой переменной x; тогда новое значение функции (1) будет

$$(x + h)(a - x - h). \tag{2}$$

Для выражения «принципа остановки», т. е. того факта, когда функция, достигая максимума или минимума, как бы останавливается в своем изменении (на современном языке — скорость изменения, т. е. производная, равна 0), Ферма приравнивает (1) и (2):

$$x(a - x) = (x + h)(a - x - h). \tag{3}$$

Раскрывая скобки и сокращая на h, получаем: $a - 2x + h = 0$. Ввиду того что бесконечно малое h исчезает перед конечным (по существу это молчаливый предельный переход при $h \to 0$), то

$$a - 2x = 0; \quad x = \frac{a}{2}.$$

Вот пример одной геометрической задачи, решенной Ферма.

З а д а ч а. *Рассечь данный отрезок LM* (рис. 8) *в точке N так, чтобы параллелепипед, построенный на квадрате LN с высотой NM, имел бы наибольший объем.*

---

[1] Аналогичную мысль высказал еще в XI в. ал-Берунн, а в XIV в. Н. Орем.

[2] Латинское слово extremum означает «крайнее».

Пусть неизвестная величина отрезка LN будет A (этой буквой пользуется Ферма вместо нашего x). Обозначая через B длину всего отрезка LM, получим для наибольшего объема выражение

Рис. 8.

$$A^2(B - A).$$

Буквой E Ферма обозначает приращение независимой переменной A (вместо нашего $x + h$ он пишет $A + E$) и согласно вышеизложенному пишет равенство

$$(A + E)^2(B - A - E) = A^2(B - A). \qquad (3')$$

Это равенство Ферма называет вымышленным или приближенным. После приведения подобных членов в (3′), сокращения на E и отбрасывания последнего, Ферма получает равенство

$$2AB = 3A^2, \qquad (4)$$

которое он называет уже «истинным». Из (4) он находит $A = \frac{2}{3}B$.

Таким образом, хотя у Ферма явно не фигурируют понятия предела и производной, его метод отыскания экстремумов совпадает по существу с методом Лейбница и Ньютона, которым пользуемся мы и в основе которого лежит приравнивание нулю производной.

Ферма применил свой метод к задачам вписания в данный шар конуса наибольшего объема, цилиндра максимальной поверхности и к другим задачам. Следует отметить, что Ферма применял свой метод лишь к целым алгебраическим функциям. У него еще нет критерия различения экстремумов (максимума от минимума). То же можно сказать о правиле нахождения максимумов и минимумов, данном голландцем Гудде в 1658 г.

20. Максимумы и минимумы у Лейбница и Эйлера

В «Методе флюксий» (1671) Ньютон, говоря об определении наибольших и наименьших значений величин, формулирует так называемый *принцип остановки*: «Когда величина есть наибольшая или наименьшая из всех возможных, то она в этот момент не течет ни вперед, ни назад». Отсюда он выводит свое правило: приравнять нулю флюксию. Ньютон приводит два примера и особо отмечает, что его правило более общее, чем правило Гудде, так как его можно применить и к иррациональностям.

В исследование проблемы максимумов и минимумов важный вклад внес Лейбниц. В своем «Новом методе» (1684) он применяет

понятие дифференциала для исследования возрастания и убывания функции и по существу высказывает изучаемую нами ныне теорему о том, что если производная (у Лейбница — дифференциал) функции $y(x)$ на некотором участке изменения аргумента положительна, то данная функция возрастает на этом участке; если же производная отрицательна, функция убывает. В случае же экстремума функции наибольшая или наименьшая ордината определяется условием, что касательная не наклонена ни в одну, ни в другую сторону, т. е. дифференциал $dy = 0$; при этом ординаты «ни возрастают, ни убывают, но находятся в покое».

Лейбниц применяет также вторую производную (точнее, дифференциал d^2y) для исследования вогнутости и выпуклости кривой.

В своем «Дифференциальном исчислении» (1755) Эйлер различает абсолютные экстремумы от экстремумов относительных, так называемых «местного характера», подчеркивая, что значение функции, например, в точке максимума вообще не совпадает с наибольшим значением этой функции в целом. Он рассматривает также максимумы и минимумы функций многих переменных $f(x, y, z, \ldots, u)$. Для исследования функций на максимум и минимум Эйлер пользуется не только первой и второй производной, но и производными более высоких порядков.

Приведем один из примеров Эйлера.

З а д а ч а. *Найти случаи, в которых выражение* $x^3 - ax^2 + bx - c$ *получает максимальное или минимальное значение.*

Положив $y = x^3 - ax^2 + bx - c$, будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2ax + b \text{ и } \frac{d^2y}{2dx^2} = 3x - a, \quad \frac{d^3y}{6dx} = 1.$$

Положив $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2ax + b = 0$, будем иметь:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 3b}}{3}.$$

Отсюда ясно, что предложенная формула не будет иметь ни максимума, ни минимума, если только не будет $a^2 > 3b$. Если же $a^2 > 3b$, то в одном из случаев будет максимум, а в другом — минимум. Действительно, мы имеем:

$$\frac{d^2y}{2dx^2} = \pm\sqrt{a^2 - 3b},$$

откуда видно, что если не имеет места $a^2 = 3b$, то значение $x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 3b}}{3}$ делает выражение $y = x^3 - ax^2 + bx - c$ минимальным, а значение $x = \frac{a - \sqrt{a^2 - 3b}}{3}$ — максимальным.

Найдем теперь, каковы будут эти значения количества y. Так как $3x^2 - 2ax + b = 0$, т. е. $x^3 - \frac{2}{3}ax^2 + \frac{1}{3}bx = 0$, то будем иметь:

$$y = -\frac{1}{3}ax^2 + \frac{2}{3}bx - c,$$

а так как

$$\frac{1}{3}ax^2 - \frac{2a^2}{9}x + \frac{ab}{9} = 0, \text{ то}$$

$$y = \frac{2}{9}(3b - a^2)x + \frac{ab}{9} - c = -\frac{2a(a^2 - 3b)}{27} \mp$$

$$\mp \frac{2(a^2 - 3b)\sqrt{a^2 - 3b}}{27} + \frac{ab}{9} - c,$$

или

$$y = -\frac{2a^3}{27} + \frac{ab}{3} - c \mp \frac{2}{27}(a^2 - 3b)^{\frac{3}{2}},$$

где верхний знак нужно взять для минимума, а нижний — для максимума.

Остается еще случай $a^2 = 3b$; так как в этом случае $\frac{y^2 d}{dx^2} = 0$, а следующий член $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$ не равен нулю, то, следовательно, в этом случае предложенная формула не будет принимать ни максимального, ни минимального значения.

В заключение следует отметить, что учение о максимумах и минимумах находит многочисленные и важнейшие практические применения в нашу эпоху, когда вопросы повышения производительности труда, связанные с рациональным использованием времени, сырья для фабрикатов и т. п., занимают первостепенное место в экономике и жизни современного общества.

21. Математическая индукция

Понимание и умение применять принцип математической индукции является хорошим критерием зрелости, которая совершенно необходима математику.

А. Н. Колмогоров

Метод индукции, издавна используемый в математике, широко применяется в экспериментальных науках. Для математики характерна *дедукция* (от латинского deductio — выведение) — умозаключение от общего к частному. При открытии новых математи-

ческих истин обычно участвуют обе эти формы умозаключений, однако при логическом обосновании, при доказательствах в математике применяют дедуктивный метод. Доказательства с помощью принципа математической индукции тоже имеют дедуктивный характер. О применении в математике неполной индукции в качестве метода доказательства предостерегал ученых П. Ферма в одном из своих писем: «...можно было бы предложить такой вопрос и взять такое правило для его решения, которое подходило бы для многих частных случаев и все же было бы на самом деле ложным и не всеобщим...». Таких примеров «ложных» доказательств немало в истории математики. Любопытно отметить, что один из них относится к самому П. Ферма. Он предполагал, что все натуральные числа вида $F_n = 2^{2^n} + 1$ являются простыми после того, как проверил факт на пяти случаях, при $n = 0,1, 2, 3, 4$. (Проверьте!) Однако в 1732 г. Эйлер опроверг предположение Ферма, доказав, что число $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$ составное, ибо делится на 641. (Проверьте!)

Вог еще два примера: 1) Доказав, что при любом натуральном n число $n^3 - n$ делится на 3, число $n^5 - n$ — на 5, а число $n^7 - n$ — на 7, Г. В. Лейбниц одно время считал, что любое число вида $n^{2k+1} - n$ при $k = 1, 2, 3, \ldots$ делится на $2k + 1$. Позже, однако, он сам обнаружил, что $2^9 - 2$ не делится на 9.

2) Почетный член АН СССР и основатель киевской алгебраической школы, Дмитрий Александрович Граве (1863—1939) предполагал, что для всех простых чисел p число $2^{p-1} - 1$ не делится на p^2 на основе того, что факт был проверен для всех простых чисел, меньших тысячи. Предположение отвергли, когда было обнаружено, что число $2^{1092} - 1$ делится на 1093^2 (1093 — простое число).

Принципом математической индукции фактически пользовались еще некоторые древнегреческие ученые. Однако впервые он был явно выражен Герсонидом в 1321 г.[1]. Характеристика принципа математической индукции содержится у широко образованного итальянского математика XVI в. Ф. Мавролико, переводчика Архимеда. В «Трактате об арифметическом треугольнике» Б. Паскаль доказывает закон образования членов этого треугольника методом математической индукции, после чего этот метод начинает постепенно привлекать внимание некоторых ученых, в частности Я. Бернулли. Лишь со второй половины XIX в. после трудов Больцано, Коши, Гаусса, Абеля чисто индуктивные методы доказательств теряют значение в математике. На первый план выдвигается дедукция и математическая индукция.

---

[1] См. с. 78.

§ 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ[1]

Если вы действительно любите математику, читайте Эйлера.

Лагранж

22. Краткий обзор развития тригонометрии

Тригонометрия возникла и развивалась в древности как один из разделов астрономии, как ее вычислительный аппарат, отвечающий практическим нуждам человека. Именно астрономия определила тот факт, что сферическая тригонометрия возникла раньше плоской.

Некоторые тригонометрические сведения были известны древним вавилонянам и египтянам, но основы этой науки заложены в Древней Греции. Древнегреческие астрономы успешно решали отдельные вопросы из тригонометрии, связанные с астрономией. Однако они рассматривали не линии синуса, косинуса и др., а хорды. Роль линии синусов угла α у них выполняла хорда, стягивающая дугу, равную 2α.

Греческий астроном Гиппарх во II в. до н. э. составил таблицу числовых значений хорд в зависимости от величин стягиваемых ими дуг. Более полные сведения из тригонометрии содержатся в известном «Альмагесте» Птолемея.

Птолемей делил окружность на 360 градусов, а диаметр — на 120 частей. Он считал радиус равным 60 частям ($60^{ч}$). Каждую из частей он делил на $60'$, а каждую минуту на $60''$, секунду — на 60 терций ($60'''$) и т. д. Говоря иными словами, он воспользовался шестидесятеричной системой счисления, по всей вероятности, позаимствованной им от вавилонян. Применяя указанное деление, Птолемей выражал сторону правильного вписанного шестиугольника или хорду, стягивающую дугу в 60° в виде 60 частей радиуса ($60^{ч}$), а сторону вписанного квадрата или хорду в 90° приравнивал числу $84^{ч}51'10''$. Хорду в 120° — сторону вписанного равностороннего треугольника — он выражал числом $103^{ч}55'23''$ и т. д. Для прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной диаметру круга, он записывал на основании теоремы Пифагора: (хорда $\alpha)^2$ + + (хорда $|180 - \alpha|)^2 =$ (диаметру)^2, что соответствует современной формуле $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Применив известные из геометрии теоремы, ученый нашел зависимости, которые равнозначны следующим современным формулам при условии:

$$0° < \alpha < 90° \quad \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1 - \cos\alpha}}{2}; \quad \sin(\alpha - \beta) =$$

$$= \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

---

[1] Изучение этой темы в средней школе проходит в IX и X классах.

Воспользовавшись этими соотношениями и выраженными в частях радиуса значениями хорд 60° и 72°, он вычислил хорду, стягивающую дугу в 6°, затем 3°; 1,5° и, наконец, —0,75°. (Значение хорды в 1° он выражал приближенно.)

Сделанные расчеты позволили Птолемею составить таблицу, которая содержала хорды от 0 до 180°, вычисленные с точностью до 1″ радиуса (напомним, здесь 1″ — это $\frac{1}{60 \cdot 60 \cdot 60}$ часть радиуса, т. е. $\frac{R}{216\,000}$).

Эта таблица, сохранившаяся до нашего времени, равнозначна таблице синусов от 0 до 90° с шагом 0, 25° с пятью верными десятичными знаками.

Названия линий синуса и косинуса впервые были введены индийскими учеными. Они же составили первые таблицы синусов, хотя и менее точные, чем птолемеевы. В Индии и начинается по существу учение о тригонометрических величинах, названное позже гониометрией (от «гониа» — угол и «метрио» — измеряю).

Дальнейшее развитие учение о тригонометрических величинах получило в IX—XV вв. в странах Среднего и Ближнего Востока в трудах ряда математиков, которые не только воспользовались существовавшими в то время достижениями в этой области, но и сделали свой значительный вклад в науку.

Известный Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми (IX в.) составил таблицы синусов и котангенсов. Ал-Хабаш или (Ахмед ибн Абдаллах ал-Марвази) вычислил таблицы для тангенса, котангенса и косеканса.

Важное значение в развитии тригонометрии имели труды ал-Баттани (ок. 850—929) и Абу-л-Вафы ал-Бузджани (940—998). Последний вывел теорему синусов сферической тригонометрии, вычислил для синусов таблицу с интервалом в 15′, значения в которой приведены с точностью до 8-го десятичного знака, нашел отрезки, соответствующие секансу и косекансу.

Абу Райхан Мухаммад ибн Ахмад-ал-Беруни (по другой транскрипции Бируни (973—1048)) обобщил и при этом уточнил результаты, которых достигли его предшественники в области тригонометрии. В труде «Канон Мас'уда» он изложил все известные в то время положения из тригонометрии и существенно дополнил их. Важное нововведение, предпринятое Абу-л-Вафой, подтвердил и ал-Беруни. Вместо деления радиуса на части, сделанного Птолемеем, они брали единичный радиус. Ал-Беруни подробно объяснил причину этой замены, показав, что все вычисления с единичным радиусом значительно проще.

Насир ад-Дин Мухаммад ат-Туси (1201—1274) в «Трактате о полном четырехстороннике» впервые изложил тригонометрические сведения как самостоятельный отдел математики, а не придаток к астрономии. Его трактат впоследствии оказал большое влияние на работы Регномонтана (1436—1476).

В первой половине XV в. Джемшид ибн Масуд ал-Каши вычислил с большой точностью тригонометрические таблицы с шагом в 1′, которые на протяжении 250 лет оставались непревзойденными.

И. Региомонтан

В Европе XII—XV вв., после того как были переведены с арабского и греческого языков на латинский некоторые классические математические и астрономические произведения, развитие тригонометрии продолжалось. При решении плоских треугольников широко применялась теорема синусов, вновь открытая жившим в Южной Франции Львом Герсонидом (1288—1344), тригонометрия которого была в 1342 г. переведена на латинский язык. Самым видным европейским представителем этой эпохи в области тригонометрии был Региомонтан. Его обширные таблицы синусов через 1′ с точностью до 7-й значащей цифры и его мастерски изложенный тригонометрический труд «Пять книг о треугольниках всех видов» имели большое значение для дальнейшего развития тригонометрии в XVI—XVII вв.

На пороге XVII в. в развитии тригонометрии намечается новое направление — аналитическое. Если до этого главной целью тригонометрии считалось решение треугольников, вычисление элементов геометрических фигур и учение о тригонометрических функциях строилось на геометрической основе, то в XVII—XIX вв. тригонометрия постепенно становится одной из глав математического анализа. Она находит широкое применение в механике, физике и технике, особенно при изучении колебательных движений и других периодических процессов. О свойстве периодичности тригонометрических функций знал еще Виет, первые математические исследования которого относились к тригонометрии. Швейцарский математик Иоганн Бернулли (1642—1727) уже применял символы тригонометрических функций. И если развитие алгебраической символики, введение отрицательных чисел и направленных отрезков содействовали расширению понятия угла и дуги, то развитие учения о колебательных движениях, о звуковых, световых и электромагнитных волнах привело к тому, что основным содержанием тригонометрии стало изучение и описание колебательных процессов. Из физики известно, что уравнение гармонического колебания (например, колебания маятника, переменного электрического тока) имеет вид:

$$y = A \sin(\omega t + \alpha). \qquad (1)$$

Графиками гармонических колебаний являются синусоиды, по-

И. Бернулли

этому в физике и технике сами гармонические колебания часто называют синусоидальными колебаниями.

В первой половине XIX в. французский ученый Ж. Фурье доказал, что всякое периодическое движение может быть представлено (с любой степенью точности) в виде суммы простых гармонических колебаний.

Расширение представлений о тригонометрических функциях привело к обоснованию их на новой, аналитической базе: тригонометрические функции определяются независимо от геометрии при помощи степенных рядов и других понятий математического анализа.

Развитию аналитической теории тригонометрических функций содействовали И Ньютон и Л. Эйлер. Основоположником этой теории следует считать Л. Эйлера. Он придал всей тригонометрии современный вид. Дальнейшее развитие теории было продолжено в XIX в. Н. И. Лобачевским и другими учеными.

В наше время тригонометрия больше не рассматривается как самостоятельная ветвь математики. Важнейшая ее часть — учение о тригонометрических функциях — является частью более общего, построенного с единой точки зрения учения о функциях, изучаемых в математическом анализе; другая же часть — решение треугольников — рассматривается как глава геометрии (плоской и сферической).

23. Теоремы сложения. Тригонометрические функции суммы и разности аргументов

При составлении тригонометрических таблиц важны формулы, которые позволяют находить тригонометрические функции суммы и разности аргументов $(\alpha \pm \beta)$, зная тригонометрические функции их. Первым дошедшим до нас трактатом, содержащим такие формулы (относящиеся, однако, к хордам), является «Альмагест» Птолемея. В этом труде геометрическим путем с помощью теоремы Птолемея выводятся формулы для хорды разности и суммы двух углов. Индийские ученые, в частности Бхаскара (XII в.), пользовались формулой, которую в современной символике можно записать так:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{R},$$

где R — радиус окружности. Этой и другими формулами сложения пользовались ученые средних веков стран Азии и Европы.

Общее правило для $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ и для $\sec(\alpha + \beta)$ было впервые геометрически выведено в 1706 г. петербургским математиком Я. Германом. Во «Введении в анализ бесконечных» Эйлер выводит формулы приведения как частные случаи теорем сложения.

В «Аналитической тригонометрии», опубликованной в Брауншвейге (Германия) в 1770 г. Г. Клюгелем, одним из последователей Эйлера, впервые фигурирует термин «тригонометрические функции». Также впервые эти функции вводятся с самого начала не как линии в круге, а как отношение сторон треугольников. Аналитический подход позволил автору раскрыть много неясных мест в тригонометрии. Теорему о синусе суммы Клюгель выводил из формулы

$$\sin C = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

которую он предварительно получал, непосредственно рассматривая треугольник ABC. Название и содержание книги Клюгеля не случайны. Под влиянием трудов Эйлера начиная с 70-х годов XVIII в. аналитический метод стал постепенно господствующим в тригонометрических работах, несмотря на то что в школьных учебниках еще долго фигурировали геометрические выводы.

24. Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента. Формулы преобразования

При составлении таблиц хорд уже Птолемей пользовался соотношением, эквивалентным нашей формуле

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}. \qquad (1)$$

Этой формуле эквивалентно и следующее, содержащееся в индийских сиддхантах соотношение:

$$\sin^2 \alpha + \sin \operatorname{vers}^2 \alpha = \left(2 \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2. \qquad (2)$$

Проверьте!

Индийцы знали также формулу для двойного синуса. Абу-л-Вафа установил формулу

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}. \qquad (3)$$

Эта и другие формулы удвоения и деления на два для синуса и косинуса встречаются у многих ученых средних веков. Виет в «Исчислении треугольников» вычислял синусы и косинусы любых кратных дуг, используя прием, подобный умножению комплексных чисел. (См. статьи И. Г. Башмаковой и И. Е. Славутина в ИМИ, вып. 21.)

Англичанин Джон Пелль, француз Г. Роберваль и другие математики XVII в. разными способами доказывали формулу

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Формула же

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha)$$

появилась впервые во «Введении в анализ» Л. Эйлера.

На протяжении веков практиковались как преобразования произведений в суммы, так и суммы в произведения в зависимости не только от целей преобразований, но и от применявшихся вычислительных средств. Действие умножения, особенно когда речь идет о многозначных числах, всегда считалось более сложным и более утомительным, чем действие сложения. Поэтому до изобретения логарифмов вычислители искали формулы преобразования произведения тригонометрических величин в сумму, чтобы заменить умножение сложением.

В XVI в. астрономы, в том числе и датский ученый Тихо Браге, один из предшественников Кеплера, применяли формулу

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

для замены произведения суммой. С этой же целью применяли и позже и применяют поныне формулы преобразования в случаях доказательства тригонометрических тождеств, вычислений с помощью натуральных таблиц и т. п.

Для обратной цели, т. е. для замены сложения умножением, формулы преобразования стали широко использоваться после того, как при вычислении стали применять таблицы логарифмов для приведения к логарифмическому виду. В этом, как и в других вопросах тригонометрии, много было сделано Эйлером.

25. Теорема тангенсов, формулы площади треугольника и некоторые другие формулы

Для нахождения площади S в треугольнике издавна применялась так называемая «формула Герона», установленная еще в III в. до н. э. великим Архимедом. Однако еще до этого Евклид в своем произведении, названном «Данные», изложил некоторые предположения, по существу имеющие тригонометрический характер. Одно из них эквивалентно известной формуле, выражающей площадь треугольника ABC:

$$S = \frac{bc \sin A}{2}. \tag{5}$$

Доказательство и современная формулировка соотношения (5) были изложены в 20-х годах XVII в. в одном из произведений ни-

дерландского ученого В. Снелля (Снеллиуса), того самого, который открыл закон преломления света.

При решении треугольников иногда применяется следующее соотношение, названное «теоремой тангенсов»:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}. \tag{6}$$

Эта теорема была в основном установлена еще в 1583 г. Т. Финком и сформулирована устно в современных терминах Ф. Виетом в 1593 г. Ее без оснований иногда называют «формулой Непера».

Другие две формулы, применяемые в отдельных случаях к решению треугольников, а именно:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}},$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}, \tag{7}$$

тоже неправильно называют «формулами Мольвейде». Дело в том, что первая из них была установлена И. Ньютоном еще в 1707 г. В 1746 г. Ф. фон-Оппель в своей книге «Анализ треугольников» вывел обе формулы (7) из геометрически доказанной «теоремы тангенсов». Что же касается К. Мольвейде, то он ограничился помещением этих двух формул в одной из своих работ, изданной в 1808 г.

При решении треугольников нередко применяется и так называемая «теорема проекций»:

$$\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B,\\ b &= c\cos A + a\cos C,\\ c &= a\cos B + b\cos A. \end{aligned} \tag{8}$$

В настоящее время доказана эквивалентность четырех теорем: (3), (4), (6) и (8).

В XVIII—XIX и начале XX в., когда применялись лишь логарифмические таблицы для решения треугольников, прибегали в основном к формулам (2) и (6), удобным для логарифмирования: с распространением таблиц натуральных значений тригонометрических функций довольно часто стали применять и формулы (1) и (8).

26. Дифференциальное уравнение свободного гармонического колебания. Теория дифференциальных уравнений в XVIII в.

Разработкой теории обыкновенных и дифференциальных уравнений занимались крупнейшие ученые XVIII в., в том числе Ж. Даламбер, Ж. Л. Лагранж, А. Клеро и др. Наибольшую роль в развитии этой теории сыграли труды Л. Эйлера. В первых двух томах его «Интегрального исчисления» содержится немало классических примеров интегрирования дифференциальных уравнений, в том числе и решения однородного линейного уравнения любого порядка с постоянными коэффициентами, т. е. уравнения вида:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0, \qquad (1)$$

где коэффициент a_1, a_2, ..., a_n постоянны. Линейным это уравнение называется потому, что оно является уравнением первой степени относительно y и его производных.

Этот тип дифференциальных уравнений — один из самых важных в практических приложениях. Решение его с помощью подстановки $y = e^{kx}$ и составление так называемого «характеристического уравнения», предложенного Эйлером, ныне можно найти в любом курсе дифференциальных уравнений.

Частным случаем (1) является дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = 0. \qquad (2)$$

К такому уравнению приводят многие задачи, относящиеся к колебательным движениям. Пусть, например, тело массой m подвешено на пружине (рис. 9). Выведем тело из положения равновесия путем растягивания пружины. Пусть $y(t)$ будет величина отклонения тела от положения равновесия в момент времени t. По второму закону Ньютона сила $F = ma$ (a — ускорение, равное $\frac{d^2 y}{dt^2}$). Эта же сила равна $-c^2 y$.

Задача, таким образом, сводится к решению дифференциального уравнения

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -c^2 y, \text{ или } \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c^2}{m} y = 0, \qquad (2')$$

идентичного уравнению (2). Для решения его по методу Эйлера применим в (2) подстановку:

$$y = e^{kx}. \qquad (3)$$

Ввиду того что $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, получим:

$$e^{kx}(k^2 + a^2) = 0. \qquad (4)$$

Алгебраическое уравнение

$$k^2 + a^2 = 0 \qquad (5)$$

называется *характеристическим*. Если мы в качестве постоянного k в подстановке (3) возьмем любой корень характеристического уравнения (5), то левая часть (4) будет тождественно равна нулю, а это значит, что e^{kx} будет решением дифференциального уравнения (2). Корнями характеристического уравнения в данном случае будут: $k_{1,2} = \pm ai$.

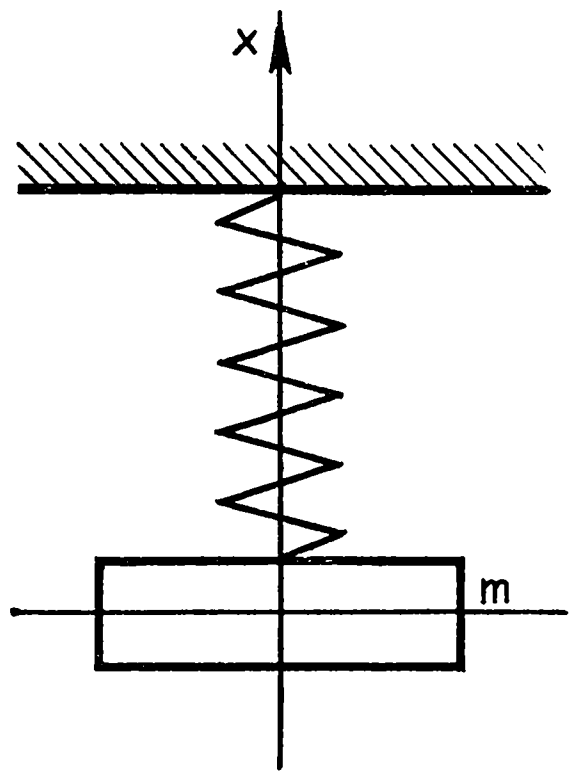


Рис. 9.

Итак, частные решения (2) суть

$$y_1 = e^{iax}, \quad y_2 = e^{-iax}. \qquad (6)$$

Но, как доказывается и легко непосредственно проверяется, в таком случае и функции

$$y_1 = \cos ax, \quad y_2 = \sin ax \qquad (7)$$

тоже являются частными решениями (и на сей раз действительными) уравнения (2). Они линейно независимы, и поэтому общее решение представится в виде

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax. \qquad (8)$$

Речь идет, как мы уже знаем, о сумме двух простых гармонических колебаний, которая представляет одно гармоническое колебание, и поэтому выражение (8) можно привести к виду:

$$y = A \sin (\omega t + \alpha_0). \qquad (9)$$

Формально переход от выражения (8) к (9) осуществляется с помощью подстановок:

$$C_1 = A \sin \alpha_0, \qquad C_2 = A \cos \alpha_0,$$

$$x = t, \quad a = \omega. \qquad (10)$$

Мы пришли, таким образом, к известному нам уравнению общего гармонического колебания. Вот почему уравнение (2) носит название дифференциального уравнения *свободного* (или незатухающего) *гармонического колебания*. Заданная постоянная $a = \omega$ есть частота колебания. Постоянная интеграции A характеризует наибольшее по абсолютной величине значение функции y, это так называемая амплитуда колебания; α_0 — это начальная фаза. С геометрической точки зрения интегральные кривые (8) или (9) представляют семейство синусоид в плоскости xOy.

К дифференциальному уравнению вида (2) сводится и задача нахождения закона движения математического маятника. Мате-

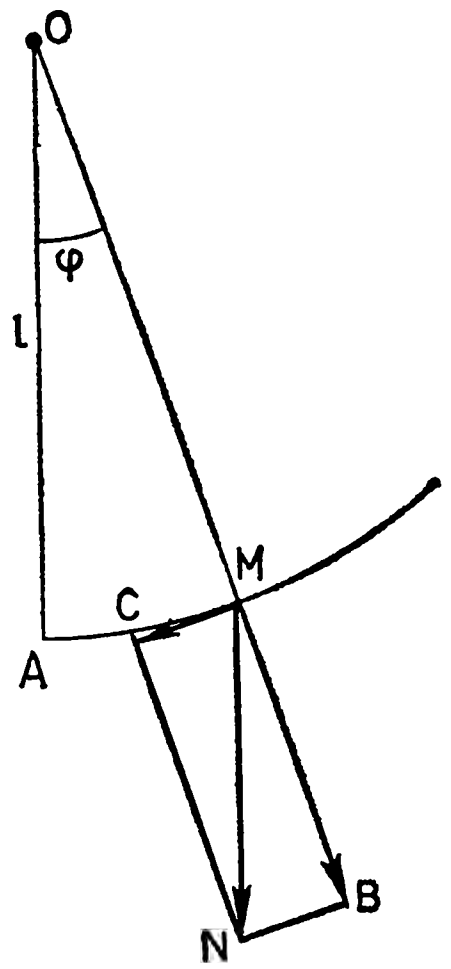


Рис. 10.

риальная точка M массы m прикреплена к неподвижной точке O на тончайшей, предполагаемой невесомой и нерастяжимой нити длиной l. Если точку M вывести из положения равновесия (рис. 10) и отпустить ее без толчка, то она под влиянием силы тяжести будет колебаться, т. е. двигаться по дуге радиуса l. Найти закон движения маятника — значит найти, как изменяется угол отклонения φ с течением времени t. В положении M на точку действует сила тяжести $MN = -mg$ и натяжение нити MO. Первую силу мы разлагаем на две составляющие. Одна из них (MB) уравновешивается натяжением нити, другая (MC) — составляющая силы тяжести по касательной — и приводит в движение маятник, при этом

$$MC = -mg \sin \varphi.$$

Так как ускорение движения точки M, т. е. вторая производная от пути (длины дуги) $l\varphi$ по t, есть $l\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, то по второму закону Ньютона

$$MC = ml\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

и мы имеем:

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi, \text{ или } \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

При малых колебаниях можно заменить $\sin\varphi$ его дугой φ; тогда получим:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0,$$

т. е. дифференциальное уравнение гармонического колебания. Его решением, как мы уже знаем, будет:

$$\varphi = A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} + \alpha_0\right),$$

в котором A — амплитуда колебаний маятника, $\sqrt{\frac{g}{l}} = \omega$ частота колебаний, а период $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Глава II.

ГЕОМЕТРИЯ

§ 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

... Кто не согласится, что никакая математическая наука не должна бы начинаться с таких темных понятий, с каких, повторяя Евклида, начинаем мы геометрию?

Лобачевский

27. Основные понятия в геометрии Евклида и в современной геометрии

Известно, что «Начала» Евклида служили на протяжении более 2000 лет образцом строго дедуктивного изложения геометрии. Однако в XIX в. после открытия геометрии Лобачевского — Бояй, а затем геометрии Римана и в связи с пересмотром и перестройкой основ математического анализа, предпринятого Больцано, Коши, Абелем, Гауссом и другими учеными, логическое построение «Начал» Евклида стало подвергаться критике. В системе построения было обнаружено много логических дефектов (недостатков), часть которых была замечена еще в древности. Это касается в первую очередь основных понятий геометрии и евклидовых определений.

Определение[1] нового понятия состоит в раскрытии его содержания, в перечислении его существенных признаков (свойств) с помощью других ранее определенных понятий, которые в свою очередь были еще ранее определены с помощью других понятий и т. д. В конце концов мы должны дойти до некоторых, обычно самых простых и немногих понятий, которые, являясь исходными, уже логически прямо не определяются, а принимают за *основные понятия*. Без выделения основных понятий операция логического определения всех других понятий вообще была бы бессмысленной.

Определения, изложенные в «Началах» Евклида, не удовлетворяют требованиям современной науки. Вот некоторые из 23 определений, которыми начинается 1 книга «Начал»:

I. Точка есть то, что не имеет частей (такое атомистическое определение точки, по-видимому, заимствовано Евклидом у предшественников и восходит к Демокриту).

---

[1] Об элементах логики в преподавании геометрии см., например: Бескин Н. М. Методика геометрии. М., 1947, с. 27—29; Столяр А. Логические проблемы преподавания математики. Минск, 1965.

II. Линия есть длина без ширины.

III. Границы линии суть точки.

IV. Прямая есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.

V. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.

VI. Границы поверхности суть линии.

VII. Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена по отношению ко всем прямым, на ней лежащим.

VIII. Плоский угол есть взаимное наклонение двух встречающихся линий, расположенных в одной плоскости.

Такие определения нельзя считать логически корректными. Во-первых, в этих определениях употребляются такие понятия (часть, длина, ширина, граница и др.), которые сами должны быть определены. Во-вторых, идея основных понятий (в современном смысле) у Евклида вообще отсутствует. В-третьих, некоторые его определения туманны и непонятны, например IV и VII. Вообще же определения Евклида являются лишь описаниями геометрических образов, и, как правило, для доказательства теорем он ими не пользовался.

Современное строго дедуктивное изложение геометрии, отраженное, например, в системе Гильберта, будет дано ниже.

28. Аксиомы в «Началах» Евклида

При дедуктивном построении геометрии, как и любой другой науки, следует исходить не только из основных неопределяемых понятий, но также из некоторых немногих и простых утверждений, т. е. недоказуемых предложений, называемых иногда постулатами (требованиями), чаще же *аксиомами* (*аксиома* — греческое слово, означающее «бесспорное положение», а также «почитаемое»), с тем, чтобы, основываясь на них, можно было строго логически обосновать, т. е. *доказать все* другие предложения, называемые уже *теоремами*. (В нашем смысле этот термин был введен Аристотелем. Его употреблял не Евклид, а его комментаторы. Первоначальный смысл этого греческого слова был «рассматриваемое».)

У Евклида постулаты и аксиомы, которые он не отождествлял (у него постулаты носят чисто геометрический характер), следуют за вышеназванными определениями.

Вот они.

Постулаты

I. Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.

II. И чтобы каждую прямую можно было неопределенно продолжить.

III. И чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом.

IV. И чтобы все прямые углы были равны.

V. И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Аксиомы

I. Равные порознь третьему равны между собой.
II. И если к равным прибавим равные, то получим равные.
III. И если от равных отнимем равные, то получим равные.
IV. И если к неравным прибавим равные, то получим неравные.
V. И если удвоим равные, то получим равные.
VI. И половины равных равны между собой.
VII. И совмещающиеся равны.
VIII. И целое больше части.
IX. И две прямые не могут заключать пространства.

Важнейшим недостатком системы евклидовых аксиом, включая и его постулаты, является ее неполнота, т. е. недостаточность их для строго логического построения геометрии, при котором каждое предложение, если оно не фигурирует в списке аксиом, должно быть логически выведено из последних. Поэтому Евклид при доказательстве теорем не всегда основывался на аксиомах, а прибегал к интуиции, к наглядности и чувственным восприятиям. Например, понятию «между» он приписывал чисто наглядный характер; он молчаливо предполагал, что прямая, проходящая через внутреннюю точку окружности, непременно должна пересечь ее в двух точках. При этом он основывался только на наглядности, а не на логике; доказательства этого факта он нигде не дал и дать не мог, так как у него отсутствовали аксиомы непрерывности. Нет у него и некоторых других аксиом, без которых строго логическое доказательство теорем невозможно.

Критика евклидовского обоснования геометрии, продолжавшаяся на протяжении нескольких веков и ставшая особенно острой в XIX столетии, привела к попыткам нового дедуктивного построения геометрии, отвечающего современным требованиям науки. Так, немецкий математик М. Паш в «Лекциях по новой геометрии» (1892) разработал главным образом аксиомы порядка, связанные с логически необоснованным до тех пор понятием «между». Затем последовали работы итальянских математиков Дж. Пеано, Дж. Веронезе и М. Пиери. Еще до этого Г. Кантор и Р. Дедекинд исследовали аксиомы непрерывности[1]. Наконец, в 1899 г. появился ставший классическим труд Д. Гильберта «Основания геометрии», в котором он сконструировал аксиоматику геометрии так, что логическая структура геометрии стала совершенно прозрачной.

---

[1] Помещенный здесь для цельности изложения материал целесообразно проработать на внеклассном занятии.

29. «Основания геометрии» Гильберта и сущность аксиоматического метода

В своих «Основаниях геометрии» Гильберт исходит из шести основных понятий, содержание которых он раскрывает в своей системе аксиом, состоящей из пяти групп. Он не дает прямого определения основным объектам геометрии: *точке*, *прямой*, *плоскости*, а также отношениям: *принадлежит*, *между*, *конгруэнтный*, потому что эти объекты и отношения не связываются ни с какими представлениями о конкретных предметах. То, что необходимо знать, о них излагается в аксиомах, которые являются, таким образом, косвенными их определениями. Под *точкой*, *прямой* и т. д. можно понимать все что угодно, в частности и обычные точки, известные нам из школьной геометрии, лишь бы они удовлетворяли следующим аксиомам.

I. Аксиомы принадлежности раскрывают содержание понятия «принадлежит»; их восемь (римская цифра обозначает порядковый номер группы, стоящая в индексе арабская цифра указывает на номер аксиомы в данной группе).

I_1. Для любых двух точек A и B существует прямая a, проходящая через A и B.

I_2. Для двух различных точек существует не более одной такой прямой.

I_3. На прямой имеются по крайней мере две точки; существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

I_4. Для любых трех точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, существует плоскость α, проходящая через A, B и C.

I_5. Через указанные точки A, B и C проходит не более одной плоскости α.

I_6. Если точки A и B прямой a лежат в плоскости α, то всякая точка этой прямой лежит в плоскости α.

I_7. Если плоскости α и β имеют общую точку A, то они имеют еще по крайней мере одну общую точку B.

I_8. Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

II. Аксиомы порядка (косвенно определяют понятие «между»).

II_1. Если точка B лежит между точкой A и C, то A, B, C суть три различные точки прямой и B лежит также между C и A.

II_2. Для любых двух точек A и C на прямой AC существует по крайней мере одна точка B, такая, что точка C лежит между A и B.

II_3. Среди любых трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

Определение. Мы рассматриваем на прямой a две точки A и B; систему двух точек A и B мы называем отрезком и будем ее обозначать через AB или BA. Точки, лежащие между A и B, называются точками отрезка AB или точками, расположенными (лежащими) внутри отрезка AB; точки A и B называются концами отрезка AB.

Все остальные точки прямой a называются точками, лежащими вне отрезка.

II_4 (аксиома Паша). Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и a — прямая в плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C; если при этом прямая a проходит через одну из точек отрезка AB, то она должна пройти через одну из точек отрезка AC или через одну из точек BC.

III. Аксиомы конгруэнтности.

III_1. Если A, B суть две точки на прямой a и A' — точка на той же прямой, или на другой прямой a', то всегда можно найти точку B', лежащую по данную от точки A' сторону прямой a', и притом такую, что отрезок AB конгруэнтен, иначе говоря, равен отрезку $A'B'$. Конгруэнтность отрезка AB отрезку $A'B'$ обозначается следующим образом:

$$AB \equiv A'B'.$$

Эта аксиома дает возможность откладывать отрезки.

III_2. Если отрезок $A'B'$ и отрезок $A''B''$ конгруэнтны одному и тому же отрезку AB, то отрезок $A'B'$ конгруэнтен также и отрезку $A''B''$; короче говоря, если два отрезка конгруэнтны третьему, то они конгруэнтны также друг другу.

III_3. Пусть AB и BC суть два отрезка прямой a, не имеющие ни одной общей точки, и пусть далее $A'B'$ и $B'C'$ суть два отрезка той же прямой или другой прямой a', также не имеющие общей точки; если при этом

$$AB \equiv A'B' \text{ и } BC \equiv B'C',$$

то и

$$AC \equiv A'C'.$$

Эта аксиома выражает требование *возможности складывать* отрезки.

Аксиома III_4 утверждает, что каждый угол (понимаемый как совокупность двух лучей с общей вершиной, не расположенных на одной прямой) может быть отложен единственным способом в заданной плоскости, при заданном луче, по заданную его сторону.

III_5. Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгруэнтности $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, то имеет место также и конгруэнтность $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

IV. Аксиомы о параллельных.

IV_1 (аксиома Евклида). Пусть a — произвольная прямая, A — точка, лежащая вне ее; в таком случае в плоскости, определяемой прямой a и точкой A, существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не пересекающей прямую a.

Пятая группа состоит у Гильберта из двух аксиом непрерывности: аксиомы Архимеда и аксиомы полноты. Последнюю

Д. Гильберт

можно заменить аксиомой Кантора. Вместо двух аксиом непрерывности можно ввести эквивалентную им аксиому Дедекинда.

V. Аксиома непрерывности.

V_1 (аксиома Дедекинда). Если все точки отрезка AB, включая и его концы, распределены на два класса так, что:

1) каждая точка отрезка принадлежит одному и только одному из этих классов, точка A принадлежит первому классу, а точка B — второму классу;

2) каждая точка первого класса, отличная от A, лежит между A и любой точкой второго класса, то на отрезке AB существует одна и только одна такая точка C, что всякая точка, лежащая между A и C, принадлежит первому классу, а всякая точка, лежащая между C и B, принадлежит второму классу. Сама точка C принадлежит либо первому, либо второму классу.

На основе этой системы 19—20 аксиом Гильберта и было осуществлено дедуктивное построение геометрии[1].

Под аксиомами современная наука понимает нечто иное, чем «очевидные истины, не требующие доказательства». Этот устаревший взгляд на аксиомы субъективен, так как то, что очевидно для одного, может не быть очевидным для другого. Аксиомы также не «истины, которые доказать невозможно». Любое предложение можно доказать, если исходить из целесообразно выбранных для этого аксиом. Аксиомы — это предложения, принимаемые без доказательства с целью раскрытия содержания основных понятий и построения на их основе строго дедуктивной науки. Таким образом, при аксиоматическом методе изложения геометрии (и любой другой ветви математики) мы еще больше, чем в школьной геометрии, применяем процесс абстракции от вещей реального мира, от обычных пространственных представлений и тем самым получаем возможность давать различные истолкования геометрическим объектам. Формально выбор основных понятий и аксиом геометрии при аксиоматическом ее построении кажется совершенно свободным, произвольным, зависящим исключительно от «творческого духа» того или иного ученого. Так и утверждают идеалисты. На самом же деле аксиомы, как и все основные геометрические понятия, возникли из опыта, из многовековой человеческой практики. Не опыт отдельных личностей, а накопленный человечеством дли-

---

[1] С примерами доказательств можно ознакомиться по кн.: Трайнин Я. Л. Основания геометрии. М., 1965.

тельный тысячелетний опыт подсказал, какие именно аксиомы следует положить в основу геометрии. Вся практическая многовековая деятельность человека подтверждает истинность принятых аксиом и всей построенной на них геометрии. Аксиоматический метод, впервые полностью разработанный Гильбертом на примере геометрии, проник в XX в. в другие ветви математики (в теорию множеств, алгебру, топологию, теорию вероятностей и др.). Со списка неопределяемых, основных понятий (объектов, отношений) и аксиом, косвенно их определяющих, начинается строго научное аксиоматическое построение каждой теории современной математики. Такой список составляет основание, фундамент, на котором чисто логически строится теория. Аксиоматический метод лежит, в частности, в основе учения о расширении понятия числа, в основе теорий групп, колец и полей.

30. Учение о параллельных в средние века

После падения Западно-Римской империи (476) математика (и наука в целом) в странах эллинизма и в странах бывшей Римской империи пришла в упадок главным образом в силу новых неблагоприятных политических, экономических и общественных условий. Еще около 80 лет до падения Рима было основано Византийское государство со столицей Константинополем, просуществовавшее до середины XV в. и выступавшее как хранитель древнегреческой культуры и как центр связей Востока с Западом. Однако дальнейшее развитие математики до XIV—XV вв. происходило в Индии, Китае, а начиная с VIII—IX вв. главным образом в странах Ближнего и Среднего Востока. Работы ученых этих стран в области геометрии нельзя, конечно, сравнить с огромным их вкладом в развитие алгебры, тригонометрии и арифметики. Тем не менее их заслуги в деле некоторого развития геометрической науки неоспоримы и сводятся главным образом к следующему: 1) ученые стран Ближнего и Среднего Востока уже в VIII—IX вв. перевели на арабский язык (с которого европейцы XII в. перевели на латинский) важнейшие труды Евклида, Архимеда, Аполлония, Птолемея и других геометров древности. Тем самым они не только спасли эти труды от гибели и забвения, но и предоставили возможность широким кругам математиков изучать и комментировать эту классику, не теряя и порой дальше протягивая нить развития геометрии; 2) их работы в области геометрических построений послужили началом интереснейших геометрических исследований, дошедших до своего расцвета в XVIII—XIX вв. в работах Л. Маскерони и Я. Штейнера; 3) разработкой геометрической теории кубических уравнений и исследованиями в области конических сечений они в известной мере предвосхитили идеи аналитической геометрии; 4) их вклад в учение о параллельных и попытки доказательства V постулата, несомненно, подготовили почву для последующих в этой области исследований европейских ученых

XVIII—XIX вв. и в конечном итоге для открытия Н. И. Лобачевским и Я. Бояй неевклидовой геометрии в 20-х годах XIX в.

Дадим краткий общий обзор некоторых работ, относящихся к последнему вопросу.

Проблема V постулата Евклида фактически занимала умы всех математиков до самого конца XIX в. В IX в. заметные попытки доказательства евклидова постулата предприняли ал-Джаухари, Ибн Корра и ан-Найризи. Видный астроном и математик Аббас ал-Джаухари, работавший в Багдаде одновременно и совместно с ал-Хорезми, часть своего труда «Усовершенствование книги «Начал» посвятил изложению доказательства V постулата. Это изложение нам известно по выдержкам, приведенным в «Трактате, исцеляющем сомнение по поводу параллельных линий» Насир ад-Дина ат-Туси, о котором речь будет идти ниже.

Для того чтобы разобраться в вопросе о доказательствах V постулата, следует уяснить себе понятие эквивалентности, т. е. равносильности предложений. Пусть имеем некоторую систему аксиом $\{A\}$ и два предложения M и N. Если из $\{A\} + M$, т. е. из системы аксиом $\{A\}$ и предложения M, можно логически вывести предложение N и, наоборот, из $\{A\} + N$ вытекает M, то предложения M и N называются эквивалентными относительно системы аксиом $\{A\}$. Докажем, например, что аксиома параллельных прямых, изучаемая в VI классе и называемая «предложением Плейфера», по имени английского ученого, сформулировавшего его в XVIII в., *эквивалентна V постулату Евклида* (подразумевается относительно системы I, II, III и V групп аксиом «абсолютной геометрии»)[1].

Пусть дан V постулат. Докажем, что имеет место предложение Плейфера. Действительно, пусть $\angle a + \angle b < 2d$ (рис. 11). Если провести прямую CD', образующую с продолжением AC $\angle a' = \angle a$, то на основании теоремы о признаках параллельности двух прямых, называемой прямой теоремой параллельных, $CD' \parallel AB$. При этом $\angle a' + \angle D'CA = 2d$, как сумма пополнительных углов вокруг точки C. Всякая другая прямая, проходящая через C и отличная от CD', образует с AC с той или другой ее стороны $\angle b$, так что сумма $\angle a + \angle b$ будет меньше двух прямых и потому прямые AB и CD пересекаются (согласно V постулату).

Легко доказать и обратное: из предложения Плейфера вытекает V постулат Евклида. (Докажите!) Трудности, общие для всех попыток доказательства V постулата и связанные с нашими обычными интуитивными пространственными представлениями, состояли в том, что почти всегда такие попытки явно или неявно, в большинстве случаев бессоз-

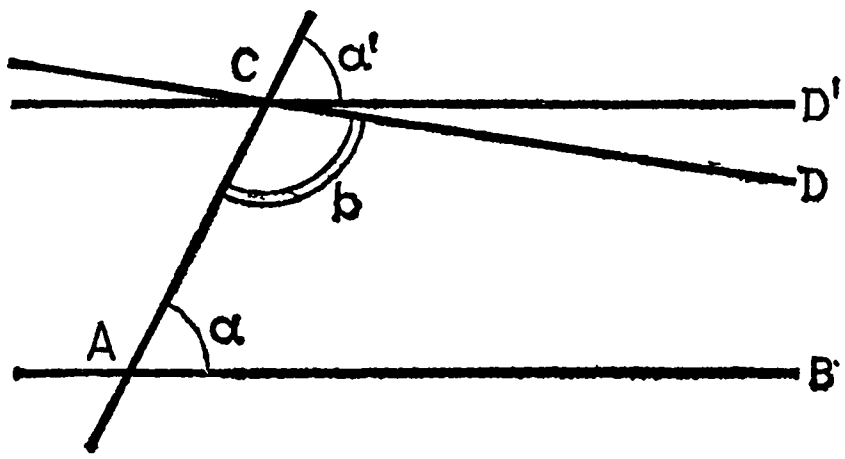


Рис. 11.

[1] См. выше, § 4; 27 — 29.

нательно, основывались на замене требовавшего доказательства V постулата другим, ему эквивалентным предложением. Доказательство ал-Джаухари, в частности, основывалось на следующем неявно допущенном предложении: если при пересечении двух прямых *a*, *b* какой либо одной определенной третьей прямой *c* накрест лежащие углы равны, то это имеет место и для *произвольной* третьей прямой; прямые же *a* и *b* *при этом всюду равноудалены друг от друга*. Неявно использованное при этом допущение о том, что геометрическое место точек, равноотстоящих от прямой *a*, есть тоже прямая — *b*, эквивалентно V постулату. В ходе доказательства ал-Джаухари доказывает теорему о том, что через любую точку внутри угла можно провести прямую, пересекающую обе его стороны. Эта теорема эквивалентна V постулату и была в конце XVIII в. неявно использована знаменитым французским математиком А. Лежандром для одного из его «доказательств» V постулата.

Первое предложение «Книги о доказательстве известного постулата Евклида»[1] выдающегося багдадского математика Сабита Ибн Корры по содержанию совпадает с вышеприведенным предложением ал-Джаухари, а следующее за ним предложение обратно первому. В третьем предложении Ибн Корра (который не употребляет термина «параллельные») доказывает, что отрезки, соединяющие концы двух равных и «не приближающихся и не удаляющихся» (т. е. равноотстоящих) друг от друга отрезков, сами равны и равноотстоят друг от друга. В четвертом предложении Ибн Корра, как и до него ал-Джаухари, устанавливает, что средняя линия треугольника равна половине основания, по отношению к которому она является равноотстоящей. При этом, однако, автор добавляет существенное указание: равноотстоящей от основания треугольника будет любая прямая, соединяющая точки боковых его сторон, делящие их в одинаковом отношении. В этом утверждении уже содержится мысль о существовании треугольника, подобного заданному. В пятом, последнем предложении своей книги Ибн Корра доказывает постулат Евклида. Как увидим ниже, в XVII в. видный английский ученый Дж. Валлис для доказательства V постулата исходил из эквивалентного ему предложения о существовании подобных треугольников. Если в первых трех предложениях сочинения, о котором идет речь, доказано *существование параллелограмма*, то в другой своей работе, в «Книге Сабита Ибн Корры о том, что две линии, проведенные под углами, меньшими двух прямых, встретятся»[2], автор доказывает *существование прямоугольника*. Предложение о существовании прямоугольника, как и предложение о существовании параллелограмма, равносильно V постулату: для его доказательства Ибн Корра использует кине-

---

[1] См.: ИМИ. М., 1961, вып. XIV.
[2] См.: ИМИ. М., 1963, вып. XV.

матические соображения, в которых скрывается утверждение, эквивалентное самому V постулату.

Астроном и математик X в., Фадл ал-Найризи, работавший в Багдаде, написал около 900 г. комментарий к «Началам» Евклида, в котором имелось доказательство V постулата, взятое у византийского математика VI в. Аганиса и основанное также на допущении существования в плоскости «равноотстоящих прямых». Впрочем, доказательство, основанное на определении параллельных прямых как равноотстоящих[1], дал еще в I в. до н. э. римский математик Посидоний. Идеи, изложенные в упомянутых ранних работах по учению о параллельных, были развиты в X—XII вв. главным образом в исследованиях Ибн ал-Хайсама и Омара Хайяма.

Уроженец Басры (Ирак), крупный физик, астроном и медик средневековья Хасан Ибн ал-Хайсам (965—1039) большую часть своей жизни провел в Каире, где состоял личным врачом халифа. Он написал около 200 работ, из которых основным трудом является его «Книга оптики»; в ней решается геометрически одно уравнение 4-й степени, к которому приводит задача об определении места отражения точечного источника света от круглого цилиндрического зеркала. В XII в. Герард из Кремоны (Италия) перевел на латинский язык этот труд Ибн ал-Хайсама (в латинской форме его имя ал-Хасан — Альхазен). Этот труд под названием «Opticae Thesaurus» («Сокровище оптики») пользовался большой популярностью в средневековой Европе и был напечатан в Базеле в 1572 г. Анализу «Начал» Евклида ал-Хайсам посвятил два сочинения: «Книга комментариев к введениям книги Евклида «Начала» и «О разрешении сомнений в книге Евклида «Начала». (См. статью Розенфельда Б. А. в ИМИ, XI. М., 1958.)

В первом из них автор подробно занимается проблемой V постулата. Ибн ал-Хайсам начинает с разъяснения и обоснования понятия параллельных прямых. Исходя из евклидова определения их («прямые, лежащие в одной плоскости и будучи бесконечно продолжены в обе стороны, ни с той, ни с другой стороны не пересекаются»), он утверждает, что сложность V постулата по сравнению с другими аксиомами состоит в самом понятии «параллельности», непосредственно связанном с понятием «бесконечность». Ведь наглядно и ясно мы можем представить себе лишь ограниченную, небольшую часть прямой (плоскости или пространства). С такой именно ограниченной, конечной частью пространства мы имеем всегда дело на практике. А между тем V постулат Евклида, как и само понятие параллельных прямых, требует представления бес-

---

[1] При изучении в школе свойств сторон и углов параллелограмма мы, основываясь на аксиоме параллельности, доказываем теорему о равенстве противоположных сторон и в виде следствия получаем предложение: «Параллельные прямые везде одинаково удалены друг от друга». Наоборот, из последнего легко выводится аксиома параллельных по Гильберту, которая, как было выше показано, эквивалентна V постулату. См., например: Киселев А. П. Геометрия. М., 1952, ч. I, с. 52.

конечного пространства. Путем построения отрезка, сколь угодно раз кратного данному, т. е. с помощью аксиомы Архимеда[1], Ибн ал-Хайсам считает возможным дать понятие бесконечной прямой. В дальнейшем с помощью кинематических соображений, заимствованных у Ибн Корры, Ибн ал-Хайсам доказывает, что геометрическое место точек плоскости, равноотстоящих от прямой по одну сторону от нее, есть прямая. На этом и основывается его «доказательство» V постулата. Существенно отметить, что при этом Ибн ал-Хайсам рассматривает четырехугольник *ABCD* с тремя прямыми углами (трипрямоугольник), который ныне называют «четырехугольником Ламберта», по имени немецкого математика И. Г. Ламберта (1728—1777). Рассматривается также четырехугольник с двумя прямыми углами, образованными основанием с двумя прилегающими к нему равными сторонами, названный в настоящее время по имени итальянского математика Джироламо Саккери (1667—1733) «четырехугольник Саккери». Одним из звеньев цепи, идейно связывающей Ибн ал-Хайсама с Саккери, были труды Омара Хайяма.

Свои «Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида» Хайям начинает с критики доказательства V постулата, данного Ибн ал-Хайсамом, за то, что в нем используется *движение*. Хайям разделяет взгляды Аристотеля и Евклида, считавших, что движение не должно применяться в геометрии. С современной точки зрения Хайям, как и Аристотель, в этом вопросе не прав. Доказательство V постулата Хайяма основывается главным образом на следующем равносильном этому же постулату допущении: если две прямые приближаются друг к другу, они обязательно должны пересечься. Рассматривая «четырехугольник Саккери» (рис. 12), он доказывает, что «верхние» углы равны. Вот как он это делает. «Дана прямая линия *AB* (рис. 13). Проведем линию *AC*, перпендикулярную *AB*, и построим линию *BD*, также перпендикулярную *AB* и равную линии *AC*. Они параллельны, как показано Евклидом в предложении 26. Соединим *CD*. Я утверждаю, что $\angle ACD$ равен $\angle BDC$.

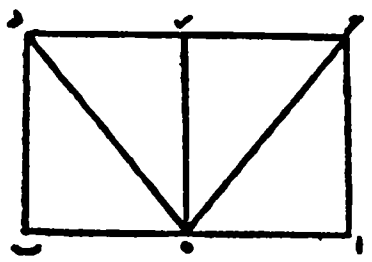
Доказательство. Соединим *CB* и *AD*. Тогда, так как *AC* равна *BD*, *AB* общая, а углы *A* и *B* прямые, то основания *AD* и *CB* равны и другие углы равны другим углам. Поэтому углы *EAB* и *EBA* равны и линии *AE* и *EB* равны, так же как оставшиеся *DE* и *EC*. Поэтому $\angle EDC$ равен $\angle ECD$, $\angle ACB$ равен $\angle ADB$ и углы *ACD* и *CDB* равны. Это то, что мы хотели доказать».

После этого «предложения 1» следует доказательство «предложения 2», согласно которому перпендикуляр *EG*, восставленный к стороне *AB* в ее середине *G*, делит пополам и сторону *CD* и перпендикулярен к ней. В «предложении 3» устанавливается, что равные «верхние» углы *ACD* и *BDC* прямые. При этом рассматрива-

---

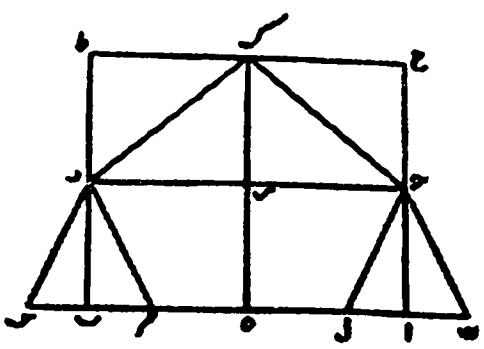
[1] Эту аксиому фактически впервые высказал Евдокс; она содержится в V книге «Начал» Евклида в виде (четвертого) определения.

(د ب) و زاويتا (ا) و(ب) قائمتان فالضلعان (د ه) و(ه ح) متساويان وزاويتا (ا ح) (ب ح د) متساويتان. فبقي (د ه ر) و (ر ه ح) متساويين. و خط (د ه) مثل (ه ح) و(ه ر) مشترك[٢] قائمتا مثل قائمتي و سائر الزوايا والاضلاع لتكافؤ مثلثيه. فيكون (د ر) مثل (ر ح) و زاوية (د ر ه) مثل (ح ر ه) فهما قائمتان. و ذلك ما اردنا ان نبين.



[ش ٣]

الشكل الثالث — وهو (لا) من الاصول. وهيئة شكل (ابحد) [ش٤]. فاقول ان زاويتي (احد) (بدح) قائمتان. برهانه: نقسم (ا ب) بنصفين على (ه) ونخرج عمود (ه ر) ونخرجه على استقامة وجعل (ر ك) مثل (ر ه) ونخرج (ح ك ط) عموداً على (ر ك) و نخرج (ا ح) و (ب د) فيتضحان (ح ك ط) على

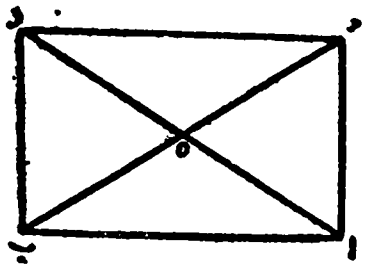


[ش٤]

(ح) و(ط) لان (ا ح) (ك ط) متوازيان وكل المتوازيين فالبعد بينهما لا يتغير.

(٢) في الاصل: «والزاويتان متساويتان ر».

الشكل الاول — و هو كط من مقالة آ[١] — خط (اب) مفروض [ش٢] و نخرج (ا ح) عموداً على (اب) ونجعل (ب د) عموداً على (اب) و مساويا لخط (ا ح) وهما متوازيان كما بينه اقليدس في شكل (كز) و نصل (ح د). فاقول ان زاويتي (ا ح د) متساويتان



[ش ٢]

لزاوية (ب د ح). برهانه: نصل (ح ب) و(ا د) فخط (ا ح) مثل (ب د) و (اب) مشترك و زاويتا (ا) و (ب) قائمتان. فقاعدتا (ا د) و(ح ب) متساويتان و سائر الزوايا مثل سائر الزوايا. فتكون زاويتا (ه ا ب) (ه ب ا) متساويتين. فخطا (ا ه) و(ب ه) متساويان. فبقي (د ه) و (ه ح) متساويين. فتكون زاويتا (ه د ح) و(ه ح د) متساويين و[زاويتا] (ا ح ب) مثل (ا د ب) فزاويتا (ا ح د) و(ح د ب) متساويتان وذلك ما اردنا ان نبين. ومن هيئا لتبين[٢] ان زاويتي (ح اب) و(ب د ا) اذا كانتا متساويتين كيف ما كانتا و خط (ا ح) و(ب ه) متساويين يجب ان يكون زاويتا (ب د ح) و (ا ح ه) متساويتين.

الشكل الثاني — وهو (ل) من الاصول — هيئة شكل (ابحد) [ش٣] و نقسم (اب) بنصفين على (ه) و نخرج (ه ر) عموداً على (اب) فاقول ان (ح ر) مثل (ر د) و (ه ر) عمود على (د ح) برهانه: نصل (ه د) و (ه ح) فخط (ا ح) مثل (ب د) و (ا ه) مثل

(١) يعني المقالة الاولى من كتاب «الاصول» لاقليدس (٢) كذا في الاصل

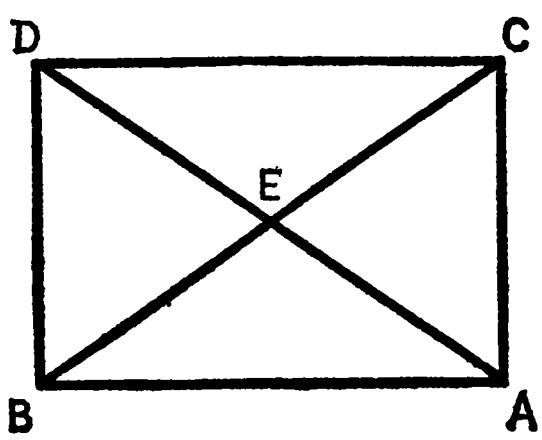


Рис. 13.

Рис. 12. Страницы из произведения Хайяма «Комментарии к трудностям во введениях[1] книги Евклида».

ются три случая: а) эти оба угла острые («гипотеза острого угла»), б) оба тупые («гипотеза тупого угла»), в) оба прямые. Устанавливается, что первые два случая приводят к противоречию с исходным, эквивалентным V постулату допущением. А именно при гипотезе острого угла обнаруживается, что перпендикуляры в точках A и B к отрезку AB не являются равноотстоящими друг от друга, как должно быть согласно ранее доказанному, а удаляются друг от друга, или, как говорят, «расходятся». Такое предложение, впрочем, имеется в неевклидовой геометрии Лобачевского. При гипотезе тупого угла перпендикуляры к AB оказываются пересекающимися («сходящимися») прямыми. Это имеет место в другой неевклидовой геометрии — «геометрии Римана» (в узком смысле). «Возможной» для Хайяма оказывается, та-

[1] Под «введениями» понимались совокупности определений и аксиом, которыми начинается почти каждая из книг «Начал» Евклида.

ким образом, лишь гипотеза прямого угла. В 4—6-м предложениях Хайям устанавливает некоторые леммы для доказательства 7-го своего предложения, совпадающего по содержанию с 29-м и 30-м предложениями I книги «Начал» Евклида: если прямая линия пересекает две параллельные прямые, то равны накрест лежащие углы и соответственные углы, а сумма двух внутренних односторонних углов равна $2d$ («обратная теорема параллельности»). В 8-м, последнем предложении первой части «Комментариев» доказан V постулат. Вторую же и третью части этой книги Хайям посвящает теории отношений.

Дальнейший вклад в развитие учения о параллельных внес уроженец Хорасана (Иран), крупнейший математик XIII в. Насирэддин ат-Туси (1201—1274). Основанную им в Мараге (Южный Азербайджан) астрономическую обсерваторию ат-Туси сумел превратить в важнейший центр научной деятельности, где были составлены известные «Ильханские астрономические таблицы» и переведены на арабский язык многие труды ученых древности. Теории параллельных ат-Туси посвятил три работы. Самая ранняя из них — «Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллельных линий»[1]. Другие две — это два издания «Изложения Евклида», т. е. «Начал» Евклида с собственными комментариями, написанными во второй половине XIII в. Одно из них (в 13 книгах) было опубликовано в Риме[2] в 1594 г., а второе (в 15 книгах) — в Тегеране в 1888 г. Построение теории параллельных в каждом из указанных трех сочинений не совпадает полностью. В целом ат-Туси основывается на работах ал-Джаухари и Хайяма. Он рассматривает тот же «четырехугольник Саккери» и те же три гипотезы, поиному опровергая первые две из них. Для доказательства V постулата он устанавливает, что перпендикуляр и наклонная к одной прямой пересекаются, а в другом варианте — что из точки внутри угла можно провести прямую, пересекающую обе его стороны.

Ко второй половине XIII в. принадлежит также работа «Основные предложения» самаркандского математика и астронома Шамс ад-Дина ас-Самарканди, в которой речь идет о первых 35 предложениях I книги «Начала» Евклида. (См.: ИМИ. М., 1961, вып XIV.) Изложенное здесь доказательство V постулата по существу мало отличается от вышеупомянутых.

В настоящее время установлено, что это доказательство принадлежит ал-Абхари (Розенфельд Б. А. История неевклидовой геометрии. М., 1976).

Резюмируя, можно сказать, что на протяжении пяти веков математики средневекового Востока не только проявляли большой интерес к теории параллельных линий, изучая соответствующую литературу древнегреческих ученых, но и сами внесли свой вклад

---

[1] См.: ИМИ. М., 1960, вып. XIII.

[2] Текст этого издания был, по-видимому, обработан некоторыми математиками, жившими после ат-Туси. Теперь их называют «псевдо-Туси».

в ее развитие. Их работы в этой области послужили исходным пунктом или основой дальнейших исследований европейских ученых, в том числе Л. Герсонида (XIII—XIV вв.), Х. Клавиуса (XVI в.), Дж. Валлиса (XVII в.), Дж. Саккери (XVII—XVIII вв.), Р. Симсона (XVII—XVIII вв.), И. Ламбе́рта (XVIII в.), А. Лежандра (XVIII—XIX вв.) и многих других.

31. Открытие неевклидовой геометрии

Первая известная нам попытка доказательства V постулата в средневековой Европе принадлежит уроженцу города Баньоль (Франция), философу, математику и астроному Леви бен Гершону (1288—1344), известному также под именами Лев Герсонид, Ралбаг, мэтр Леон де Баньоль. Он жил в разных городах Южной Франции. Среди математических работ Герсонида имеется и «Комментарий к введениям книги Евклида»[1] — работа, от которой до нас дошли лишь небольшие отрывки. Она, видимо, написана под непосредственным влиянием работы Ибн ал-Хайсама. «Доказательство V постулата у Герсонида по существу примыкает к идеям Хайяма и ат-Туси, также исходивших из работы Ибн ал-Хайсама. В ходе своих рассуждений Герсонид пишет: «Мы знаем, что существуют в плоскости линии, которые, будучи продолжены неограниченно, приближаются друг к другу, но нигде не встречаются, сколько бы мы их ни продолжали». «Постулат Евклида является важнейшей предпосылкой теоремы о сумме углов треугольника»[2]. Вопрос о существовании асимптотических прямых, на который намекает Герсонид, и связь V постулата с теоремой о сумме углов треугольника красной нитью проходят и у последовавших за Герсонидом европейских исследователей проблемы V постулата. Одной из первых в Западной Европе попыток доказать V постулат была попытка Кристофора Клавиуса (1537—1612). Он почти всю свою жизнь проработал в должности преподавателя коллегии ордена иезуитов в Риме. Клавиус известен как один из видных комментаторов Евклида и имеет определенные заслуги в развитии тригонометрии. При доказательстве V постулата он исходил из допущения, близкого к допущениям Ибн ал-Хайсама.

С латинским переводом «Изложения Евклида» ат-Туси, напечатанным в конце XVI в. в Риме, ознакомились Валлис и Саккери.

Профессор Оксфордского университета Джон Валлис считал, бесспорно, верным следующее положение: *для каждой фигуры всегда существует другая подобная ей фигура произвольной величины*. На основе этой аксиомы он изложил в 1663 г. «доказатель-

---

[1] См.: Комментарии к введениям книги Евклида (отрывок). — ИМИ. М., 1958, вып. XI.

[2] См.: Carlsbach. Levi ben Gerschon als Mathematiker. Berlin, 1910.

ство» евклидова постулата, которое вкратце сводится к следующему.

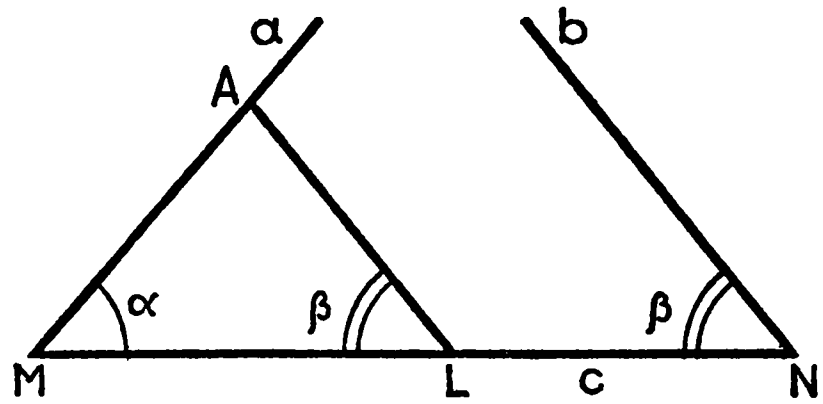


Рис. 14.

Пусть прямые a и b образуют с секущей MN внутренние односторонние углы α и β, в сумме меньшие $2d$ (рис. 14). Непрерывно передвигая прямую b по направлению к точке M так, чтобы величина угла β сохранялась, дойдем до такого ее положения AL, при котором она пересекает AM в точке A, и получим треугольник AML. Согласно аксиоме Валлиса можно построить на отрезке MN треугольник, подобный треугольнику AML. Вершина построенного треугольника и будет точкой пересечения прямых a и b.

Значение «доказательства» Валлиса состоит в том, что благодаря ему была четко выявлена эквивалентность аксиомы о существовании подобных фигур с V постулатом.

Одним из ученых, предвосхитивших неевклидову геометрию, был итальянский монах Джироламо Саккери (1667—1733), преподававший грамматику в иезуитской коллегии в Милане. Здесь под влиянием Джованни Чевы[1] Саккери заинтересовался математикой и стал серьезно заниматься ею. Впоследствии он преподавал математику в университете г. Павии. На последнем году своей жизни Саккери опубликовал (на латинском языке) книгу под заглавием «Евклид, очищенный от всех пятен». В ней он поставил перед собой задачу исправить все недостатки («пятна») «Начал» Евклида, в первую же очередь доказать V постулат. Саккери решительнее и дальше своих предшественников сделал попытку доказать V постулат от противного. Этот путь он не сумел проделать до конца, но, идя по нему, Лобачевский впоследствии открыл неевклидову геометрию.

Рассматривая четырехугольник (рис. 13), носящий его имя (который справедливости ради следовало бы назвать «четырехугольником Хайяма»), Саккери стремится доказать, что гипотезы тупого и острого угла приводят к логическим противоречиям и что остается лишь гипотеза прямого угла, из которой вытекает евклидов V постулат. Он легко опровергает гипотезу тупого угла. Пытаясь опровер-

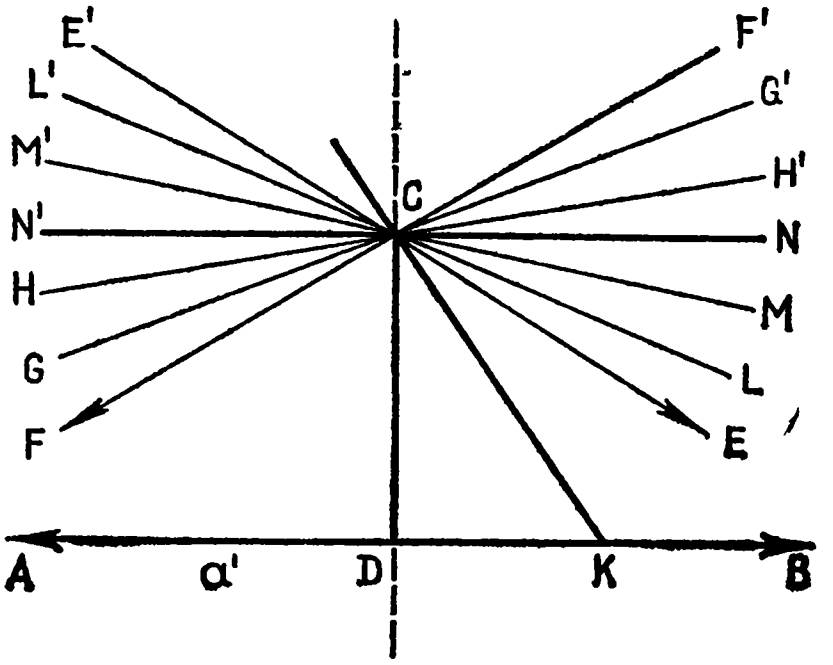


Рис. 15.

[1] См. § 25, задача 20.

гнуть и гипотезу острого угла, он доказывает, что: 1) геометрическое место точек плоскости, равноотстоящих от данной прямой, по одну ее сторону не является прямой или окружностью, а другой линией (которую Лобачевский впоследствии назвал *эквидистантой*, т. е. «равноотстоящей»); 2) две прямые, содержащиеся в одной плоскости (рис. 15), либо пересекаются в одной точке (такие прямые Лобачевский назвал «сходящимися»), либо не пересекаются, имея общий перпендикуляр, по обе стороны от которого они друг от друга удаляются («расходящиеся прямые» в терминологии Лобачевского), либо не пересекаются, удаляясь друг от друга в одном направлении и асимптотически приближаясь в другом («параллельные» Лобачевского).

Если бы Саккери пользовался лишь логическими выводами, строгой дедукцией, то никакого противоречия он в указанных выше предложениях не нашел бы. Однако, будучи предубежден о невозможности того, чтобы для евклидова постулата не имелось доказательства, Саккери для опровержения гипотезы острого угла прибег к утверждению чисто интуитивного характера: существование асимптотических прямых якобы «противоречит природе прямой линии». Заслуга Саккери состоит, разумеется, не в конечном его выводе, а в намеченном им пути доказательства и в установлении промежуточных предложений, выведенных им на основе гипотезы острого угла, которые сто лет спустя легли в основу новой, неевклидовой геометрии Лобачевского.

К числу предшественников последнего следует отнести и члена Берлинской Академии наук — астронома, математика и философа Иоганна Генриха Ламберта, эльзасца, считавшего себя швейцарским ученым и писавшего одни из своих произведений на французском языке, другие — на немецком.

В опубликованном после его смерти произведении «Теория параллельных линий» (1786) Ламберт рассматривает четырехугольник, носящий, как сказано выше, его имя (трипрямоугольник, который следовало бы назвать «четырехугольником Ибн ал-Хайсама»), и исследует, как и Саккери, возможные при этом три гипотезы. Он получает ряд новых результатов геометрии, построенный на гипотезе острого угла, т. е. будущей неевклидовой геометрии Лобачевского, в том числе и следующий: если сумма углов треугольника ABC, как известно, меньшая двух прямых углов, равна $2d - \delta$, то площадь треугольника пропорциональна δ (δ — «дефект» треугольника). В отличие от Саккери Ламберт в своих рассуждениях нигде не отступает от строгой дедукции, и поэтому он не находит противоречия в гипотезе острого угла и признает тщетность всех попыток доказать V постулат.

Несмотря на это, однако, Ламберт, как и его предшественники, не считал гипотезу острого угла действительно возможной. На таких же позициях стоял и знаменитый французский математик А. М. Лежандр (1752—1833), значительно способствовавший своими многочисленными попытками доказать евклидову аксиому па-

раллельности[1], привлечению внимания математиков первой половины XIX в. к проблеме V постулата.

Эта проблема, как известно, была впервые решена профессором Казанского университета, гениальным русским математиком Николаем Ивановичем Лобачевским (1792—1856), открывшим в 1826 г. первую неевклидову геометрию (называемую также «гиперболической»). Независимо от него к тому же открытию пришел и молодой венгерский математик Я. Бояй. Первый печатный труд по неевклидовой геометрии — статья Н. И. Лобачевского «О началах геометрии» — появился в 1829 г. в «Казанском вестнике». Через три года была опубликована на латинском языке работа по неевклидовой геометрии Яноша Бояй «Appendix» («Приложение»), название которой объясняется тем, что она появилась в виде приложения к одной из работ отца Яноша, математика Фаркаша Бояй. После смерти Гаусса выяснилось, что он также еще до Лобачевского и Бояй пришел к той же геометрии.

Идеи Лобачевского и Бояй[2] с трудом пробивали себе дорогу в науке. Лишь в 70—80-х годах прошлого столетия после появления работ Римана, Кэли, Клейна и Пуанкаре более широким кругам математиков стало ясно, что V постулат недоказуем, так как он не зависит от других аксиом евклидовой геометрии.

Попытки доказательства V постулата принесли большую пользу в том отношении, что выяснили, какие теоремы геометрии опираются на этот постулат и какие от него не зависят. Совокупность теорем геометрии, не зависящих от евклидовой аксиомы параллельности, венгерский математик Янош Бояй назвал «абсолютной» геометрией. Все же остальные теоремы, т. е. те, при доказательстве которых мы непосредственно или косвенно основываемся на V постулате, составляют собственно евклидову геометрию.

В курсе VI класса важнейшими теоремами абсолютной геометрии являются следующие: теорема о смежных и вертикальных углах, о равенстве треугольников, о внешнем угле треугольника, о прямой и ломаной, о сравнительной длине перпендикуляра и наклонных, прямая теорема параллельных. К собственно евклидовой геометрии относятся обратная теорема о параллельных линиях (т. е. теорема о том, что при пересечении двух параллельных прямых третьей соответственные углы равны и т. д.), теорема о пересечении перпендикуляра и наклонной к одной и той же прямой, о сумме углов треугольника со всеми ее следствиями (в том числе и теорема о сумме углов многоугольника) и др.

На аксиоме параллельности основывается почти весь раздел «Параллелограммы и трапеции». В главе «Об окружности» все

---

[1] К предшественникам Лобачевского следует отнести, кроме уже названных выше ученых, также любителя математики, юриста и профессора Харьковского университета Ф. Швейкарта и его племянника Тауринуса.

[2] Пришедший к этим же идеям К. Ф. Гаусс (1777—1855) прн жизни ничего по этому поводу не опублнковал и открыто в защиту их не выступал.

теоремы о форме и положении окружности (за исключением теоремы о том, что через всякие три неколлинеарные точки можно провести окружность, и следствий этой теоремы), теоремы о зависимости между дугами, хордами и расстояниями хорд от центра, о взаимном расположении прямой и окружности не опираются на аксиому параллельных Евклида. Доказательство многих теорем раздела «О вписанных и некоторых других углах» и «О вписанных и описанных многоугольниках» существенно основывается на предложении о том, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним не смежных углов, а это предложение в свою очередь вытекает из теоремы о сумме углов треугольника — теоремы, непосредственно связанной с евклидовой аксиомой параллельных. Теорема о том, что во всякий треугольник (и в любой правильный многоугольник) можно вписать окружность и что около любого правильного многоугольника можно описать окружность, не требует евклидовой аксиомы параллельности.

Раздел «Подобные фигуры» также построен на аксиоме параллельных, так как с самого начала лемма, доказывающая существование подобных треугольников, опирается на евклидову теорию параллельных, на аксиому параллельности («прямая, параллельная какой-нибудь стороне треугольника отсекает от него треугольник, подобный данному»). Сюда относятся и все теоремы о метрических соотношениях в треугольнике и круге, в том числе и теорема Пифагора.

В разделе «Правильные многоугольники» теоремы о построении правильных многоугольников циркулем и линейкой опираются на аксиому параллельных, тогда как теорема о том, что около всякого правильного многоугольника можно описать и во всякий правильный многоугольник можно вписать окружность, принадлежит абсолютной геометрии. Теоремы о площадях фигур связаны с аксиомой параллельности Евклида, так как единицей измерения площадей избирается квадрат — понятие евклидовой геометрии.

В стереометрии к абсолютной геометрии относятся разделы об определении положения плоскости (в том числе основные свойства плоскости), о перпендикуляре и наклонных к плоскости, о двугранных и многогранных углах, об угле прямой с плоскостью. Предложения, заключающие понятие параллельности, связаны с указанной аксиомой. Далее, в X классе, все утверждения, содержащие понятие площади поверхности и объема, опираются на постулат Евклида.

В отношении геометрических построений следует иметь в виду, что к задачам абсолютной геометрии принадлежит построение треугольника по трем его сторонам или по двум сторонам и углу между ними, проведение перпендикуляра из точки на прямой к этой прямой и из точки вне прямой к данной прямой. Не опираясь на V постулат, можно решить также задачу о проведении касательной к данной окружности из внешней точки. Только в целях упрощения эта задача решается в учебниках при помощи аксиомы парал-

лельных Евклида. На постулат Евклида опираются почти все задачи, содержащие в условии понятия площади или параллельности.

32. Старые и современные обозначения и символы в геометрии

Некоторые знаки и обозначения для геометрических фигур и понятий были введены в средние века и в эпоху возрождения ($\triangle$ — треугольник, $\square$ — прямоугольник, $\bigcirc$ — окружность, $\perp$ — перпендикулярно, $\llcorner$ — прямой угол, $\smile$ — дуга, $\sim$ — подобный, $\angle$ — угол и др.). В частности, в средние века параллельность обозначалась знаком $=$. Лишь в XVII в., после того как этот знак был в 1557 г. введен Р. Рекордом для обозначения *равенства*, параллельность стали обозначать знаком $\parallel$.

В своих «Основаниях геометрии» Гильберт обозначает точки прописными латинскими буквами (A, B, C, ...), *прямые* — строчными латинскими буквами (a, b, c, ...), *плоскости* — малыми или греческими буквами (α, β, γ, ...), *углы* — знаком $\sphericalangle$ ($\sphericalangle ABC$).

В геометрии в настоящее время применяются современные математические символы, разработанные в конце XIX — начале XX в. в теории множеств и в математической логике. Вот самые употребительные из них[1]:

$\in$ — знак *принадлежности*; например $A \in a$ означает: точка A принадлежит (или лежит на) прямой a.

$\in$ или $\notin$ — знак *непринадлежности*; $A \notin a$ означает: точка A не лежит на прямой a.

$\sim$ — знак *эквивалентности* двух множеств.

$\subset$, $\supset$ — знаки *включения*; $M_1 \subset M$, или $M \supset M_1$, означает: M_1 является подмножеством множеств M, т. е. M_1 содержится в M, или что то же, M содержит M_1; в качестве примера можно представить себе M_1 и M как два концентрических круга с радиусами r_1 и r ($r_1 < r$). Знаки включения аналогичны знакам неравенства ($<$, $>$) в алгебре.

$\cup$ — знак *объединения* суммы двух множеств M и N, под которым подразумевается множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств M и N; например, $A \in a \cup b$: точка A лежит на прямой a или на прямой b. Она может лежать и на обеих прямых, т. е. быть точкой их пересечения. В математической логике этому знаку соответствует

$\vee$ — знак *дизъюнкции* высказываний ($X \vee Y$), заменяющий союз «или» в неразделительном смысле.

---

[1] Большинство указанных ниже обозначений принадлежит Пеано. О началах математической логики и применении символов см.: Депман И. Я. Первое знакомство с математической логикой. Л., 1963.

$\cap$ — знак *пересечения* (общей части) двух множеств. Например, $a \cap \alpha$: пересечение прямой a с плоскостью α. Иногда обозначается и так: $a \times \alpha$, $a \cdot \alpha$.

В математической логике имеем:

$\wedge$ — знак *конъюнкции* (или логического произведения) высказываний ($a \wedge b$), под которым понимают новое высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания a и b.

$\setminus$ — знак *дополнения* множества N до множества M ($M \setminus N$) или *разности* $M—N$, под которым понимается множество элементов, принадлежащих M и не принадлежащих N. Так, если пересечь круг M прямой a, то один из полученных сегментов N будет *дополнением* другого сегмента L до M.

$\forall$ — знак «*для всех*» (квантор общности). Пример: $\forall B \in a$ означает: для всякой точки B, принадлежащей прямой a. ($\forall$ — перевернутая буква А, начальная в немецком слове Alle — все.)

$\exists$ — квантор *существования*. Примеры: 1) $\exists A \overline{\in} a$ означает: существует точка A, не принадлежащая прямой a; 2) $\exists \alpha \equiv\!\!\!= (a, b)$ означает: существует плоскость α, которой принадлежат прямые a и b ($\exists$ — перевернутая буква Е, начальная в немецком слове Existieren — существовать).

$\rightarrow$ — знак *импликации* (следствия). $X \rightarrow Y$ означает: из высказывания X следует высказывание Y.

Приведем в качестве примера краткую символическую запись следующей теоремы: если прямая a параллельна какой-нибудь прямой b, лежащей в плоскости α, то она параллельна этой плоскости.

Теорема: $(a \parallel b,\ b \in \alpha) \rightarrow a \parallel \alpha$.

Доказательство. Пусть $a \nparallel \alpha$, $a \cap \alpha = M$, $\exists\ \beta \equiv\!\!\!= (a, b)$ — по условию.

Тогда $b = \alpha \cap \beta$, $M \in \alpha$; $M \in \beta \rightarrow M = a \cap b$, что противоречит условию.

33. Изображения пространственных фигур. Из истории начертательной геометрии

Еще в глубокой древности человек чертил и рисовал на скалах, камнях, стенах и предметах домашнего обихода изображения вещей, деревьев, животных и людей. Он делал это для удовлетворения своих потребностей, в том числе и эстетических. При этом основное требование к таким изображениям заключалось в том, чтобы изображение вызывало правильное зрительное представление о форме изображаемого предмета.

Римский архитектор Витрувий еще в I в. до н. э. применял три проекции — план, фасад и профиль. Витрувий рассказывает в своем труде «Десять книг об архитектуре» (переведенном на русский язык Д. Савицким в 1757 г.), что еще в V в. до н. э. Агафарх, Демокрит и Анаксагор пользовались элементами перспективы при создании декорации для театра, когда исполнялись «Прикованный Прометей» и другие трагедии великого древнегреческого драматурга Эсхила (525—456 гг. до н. э.).

С ростом практических и технических применений изображений (в строительстве зданий и других гражданских и военных сооружений и т. п.) к ним стали предъявлять и такие требования, чтобы по изображению можно было судить о геометрических свойствах, размерах и взаиморасположении отдельных элементов определенного предмета. О таких требованиях можно судить по многим памятникам древности, уцелевшим до наших дней. Однако строгие геометрически обоснованные правила и методы изображения пространственных фигур (с соблюдением перспективы) стали систематически разрабатывать художники, архитекторы и скульпторы лишь в эпоху Возрождения: Леонардо да Винчи, Дюрер, Рафаэль, Микеланджело, Тициан и др.

Об изображениях, выполненных методами, близкими к аксонометрии, свидетельствуют русские фрески и иконописная живопись XIV—XVI вв. Отсутствием перспективы характеризуются многие русские миниатюры с технической тематикой. На миниатюре начала XV в., изображающей литье колокола в Твери (рис. 16), показано устройство плавильных печей[1].

Основы математической теории перспективы были впервые разработаны Ж. Дезаргом в 1630 г. В русских чертежах XVIII в. применяются, кроме перспективных и аксонометрических, также ортогональные проекции. Последние, в частности, использовались выдающимися русскими изобретателями И. И. Ползуновым (рис. 17) и И. П. Кулибиным (рис. 18).

Растущие запросы архитектуры, техники, промышленности, военного дела и живописи привели к формированию специальной математической ветви — *начертательной геометрии*, завершенной французским математиком Г. Монжем. Труд последнего «Начертательная геометрия», возникший из решений ряда вопросов фортификации и опубликованный в 1798 г., лег в основу проекционного черчения, которое широко используется в современной технике и науке. В своей книге Монж разработал метод ортогонального проектирования пространственных фигур на две взаимно перпендикулярные плоскости («метод Монжа»), получая двойное изображение оригинала — на *горизонтальной* и на *вертикальной* плоскостях. Это дает возможность решить и обратную задачу: восстановление пространственной фигуры или изучение ее геометричес-

---

[1] См.: Кузин А. А. Краткий очерк истории развития чертежа в России. М., 1956, с. 7.

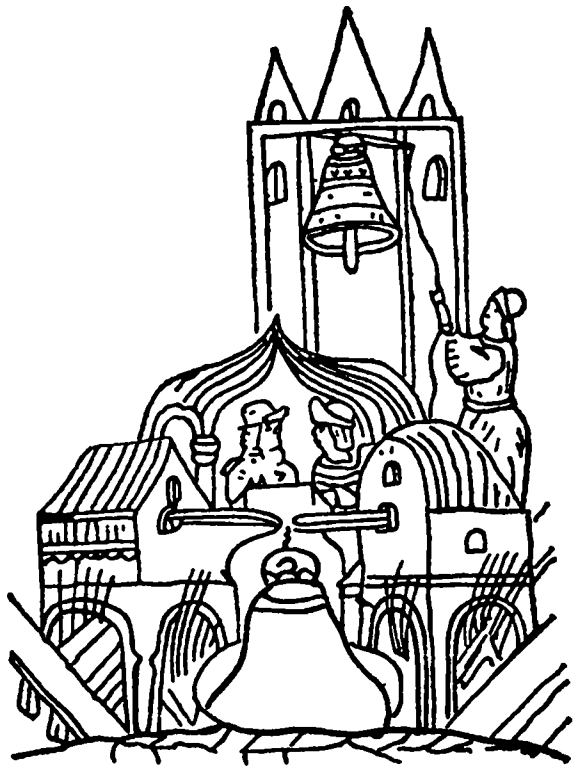


Рис. 16. Литье колокола в Твери. Русская миниатюра XV в.

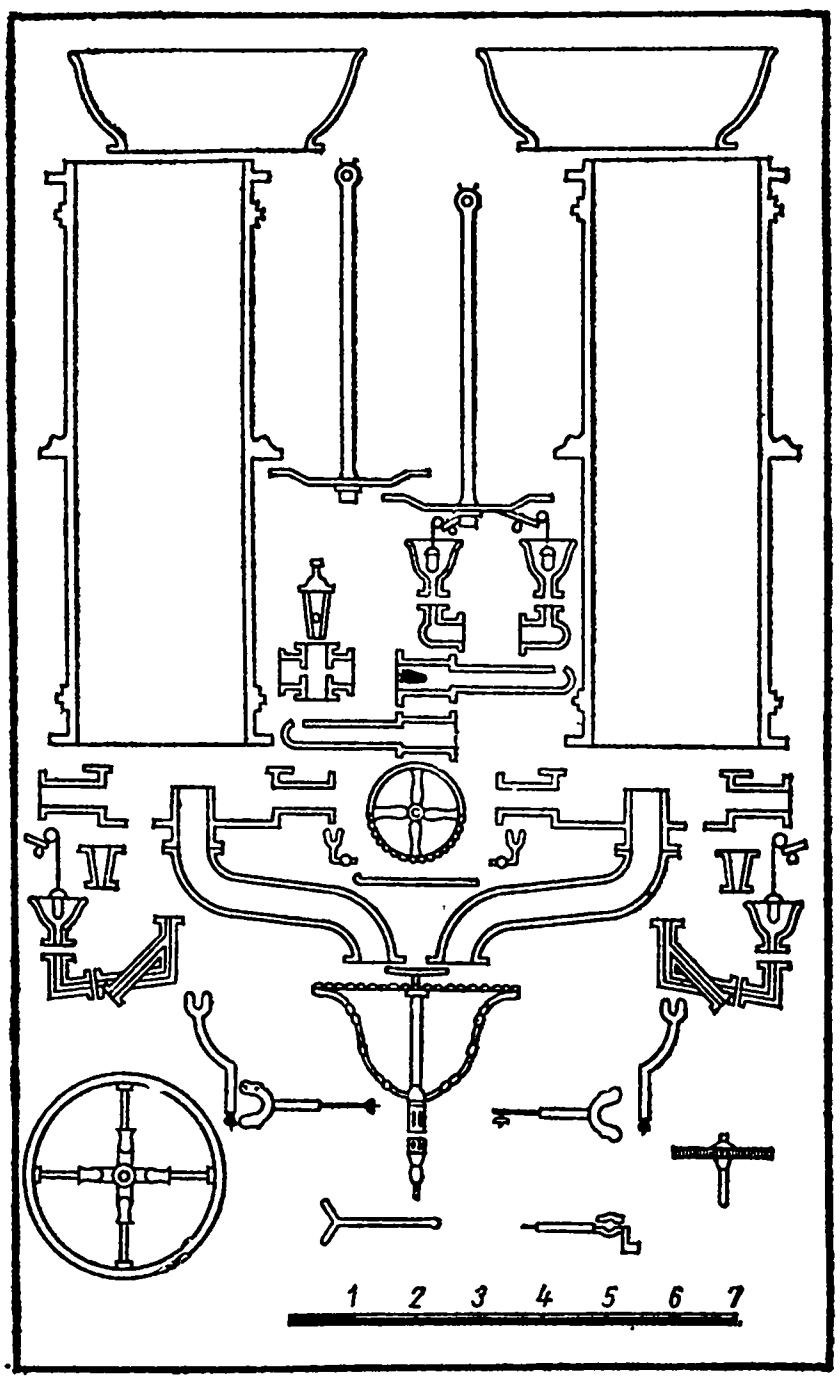


Рис. 17. Чертежи деталн машины И. Н. Ползунова, выполненные в 60-х годах XVIII в.

ких свойств по заданным (горизонтальному и вертикальному) изображениям, а также решение различных задач, касающихся пространственных фигур, с помощью их плоских изображений.

Недостатком метода Монжа является малая его наглядность. Поэтому во многих вопросах, в частности в школе, наиболее употребительным является более наглядный, *аксонометрический* (измерение по осям) *метод*, основанный на *параллельной проекции*.

Наиболее наглядное изображение пространственных фигур на плоскости дает центральная проекция — перспектива, требующая, однако, дополнительных условий для решения обратной задачи, о которой говорилось выше. Существуют и другие способы изображения пространственных фигур (проекции с числовыми отметками, федоровские проекции и т. д.).

Первая оригинальная русская книга по начертательной геометрии была опубликована в 1821 г. Я. А. Севастьяновым. Разные прикладные вопросы начертательной геометрии разрабатывались академиком И. И. Сомовым и профессором В. И. Курдюмовым. Значительный научный вклад в развитие начертательной геометрии внес крупный русский кристаллограф и геометр Е. С. Федоров (1853—1919). Своими трудами («Начала учения о фигурах», «Новая геометрия как основа черчения» и др.) он способствовал не только развитию теории групп, но и заложению основ многомерной начертательной геометрии. Со

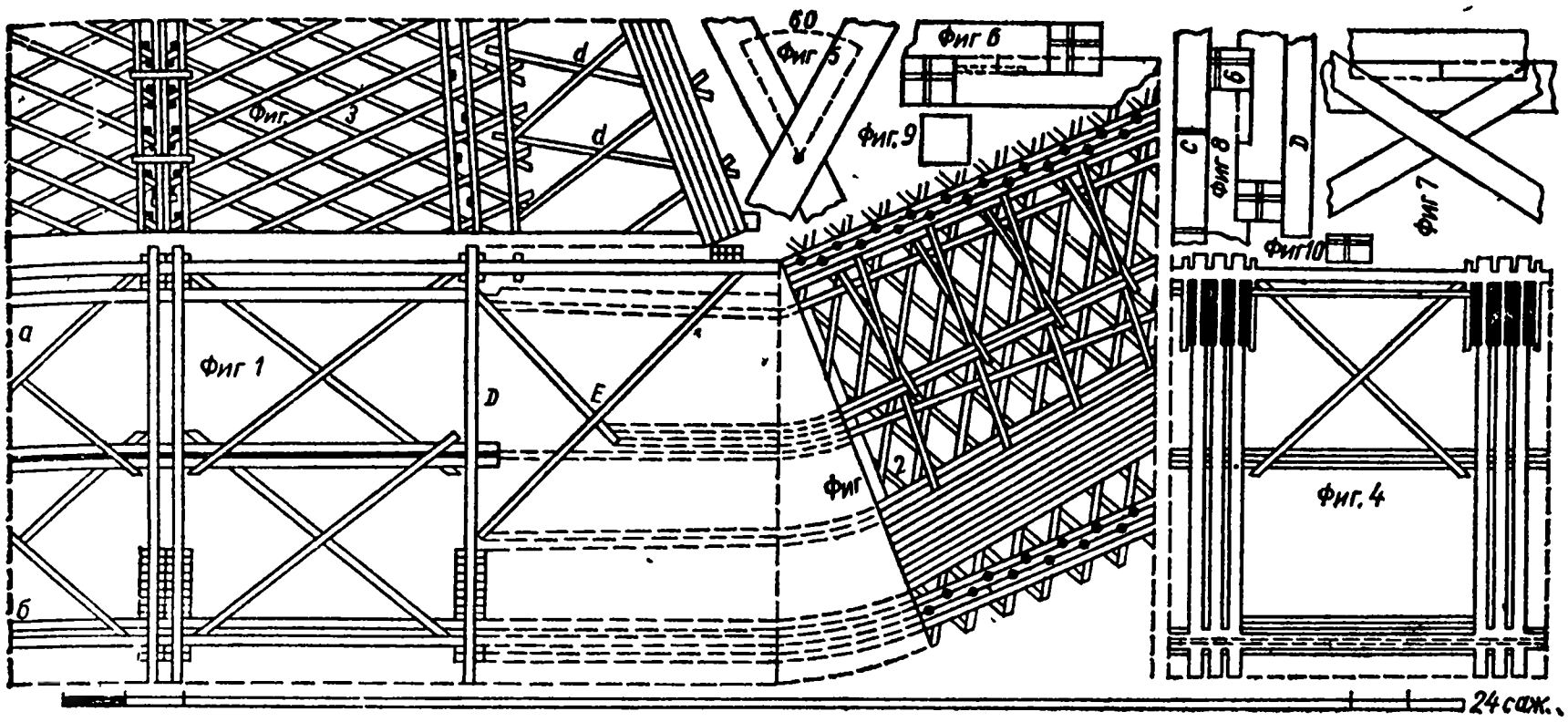


Рис. 18. Чертежи деревянного одноарочного моста И. П. Кулибина, выполненные в 70-х годах XVIII в. (*1* — поперечный разрез, видны две спаренные фермы и крайняя основная ферма с подкосами *E*; *2* — вид сбоку; *3* — вид сверху).

второй половины прошлого столетия на развитие начертательной геометрии стала оказывать значительное влияние проективная геометрия. Понятия проективной геометрии для построения начертательной широко использовали А. К. Власов, Н. А. Рынин и другие советские математики.

§ 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА. ВЕКТОРЫ

Я думаю, что нам необходимо иметь еще другой анализ, собственно геометрический или линейный, который давал бы нам возможность выражать непосредственно положение, подобно тому как с помощью алгебры выражают величину.

Лейбниц

34. Геометрическое исчисление в Древней Греции

Векторное исчисление, т. е. исчисление с направленными отрезками, приняло современный вид лишь в конце XIX в., главным образом в связи с потребностями механики и физики. Корни его уходят в далекое прошлое, причем одним из важнейших источников формирования основных понятий учения о векторах была теоретическая и практическая геометрия. Вот почему учение о векторах почти до конца XIX в. называли *геометрическим анализом* или *геометрическим исчислением*.

Представление величин отрезками (конечно, не направленными) и зачатки геометрического исчисления мы находим в древнегре-

ческой математике. Известно, что открытие несоизмеримости в школе Пифагора привело греческих ученых не к расширению понятия числа, а к сведению вопросов арифметики и алгебры к геометрическим задачам, к изображению чисел и непрерывных величин с помощью отрезков и прямоугольников, к созданию геометрической теории отношений Евдокса и к «геометрической алгебре». В древнегреческом геометрическом исчислении, изложенном в «Началах» Евклида, сложение и вычитание величин сводится к таким же операциям над отрезками, умножение величин — к построению прямоугольника на соответствующих отрезках, деление — к операции «приложения» геометрических фигур. Геометрическая алгебра, сыгравшая известную роль в развитии математики, стала из-за ограниченности своих средств тормозом в развитии алгебры в XVI—XVII вв. И если алгебра Виета еще тесно связана с геометрией и в ней по евклидовому образцу строго соблюдается принцип однородности, согласно которому нельзя складывать, например, площадь с линией, и если Виету нужно было образовать выражение вида $ab + c$, он указывал, например, что a и b — линии, а c — плоская фигура, или a — линия, b — плоская фигура, а c — тело, то уже Декарт в своем стремлении, с одной стороны, освободить алгебру от подчинения геометрии, а с другой — открыть путь в геометрию числовой алгебре по-новому строит исчисление отрезков.

35. Исчисление отрезков в XVII—XVIII вв.

Декарт представлял любую дискретную или непрерывную величину (число, длину, площадь, объем и т. п.) отрезком и ввел действия с отрезками. Поскольку все члены любого алгебраического выражения или уравнения были отрезками, соблюдение принципа однородности потеряло всякий смысл. Однако, ввиду того что Декарт, как и Евклид, оперировал в основном с ненаправленными отрезками и применял их так же, как применяются числа, его исчисление отрезков дальнейшего развития не получило.

Идея создания геометрического исчисления, близкого по смыслу к современному векторному исчислению, была впервые выдвинута в 1679 г. Лейбницем в одном из его писем к Гюйгенсу[1]. Вообще же в последние десятилетия XVII в. и в XVIII в. деятельность математиков сосредоточивалась в области бурно развивающегося математического анализа и его приложений к естествознанию. Вопросам геометрии, геометрических методов и алгорифмов большого внимания ученые той эпохи не уделяли. Вот почему и вопрос создания «геометрического исчисления» вновь возникает лишь в начале XIX в. Однако в физике еще в конце XVI — начале XVII в. Леонардо да Винчи, Галилео Галилей и другие ученые пользовались направленными отрезками для наглядного представления

[1] См. эпиграф. Однако у Лейбница еще не было идеи ориентации.

сил в физике. Так поступал и Симон Стевин, который, изучая равновесие тел на наклонной плоскости, дошел до разложения силы на составляющие и открыл закон параллелограмма сил. Формулируя свои законы движения планет, Кеплер по существу рассматривает направленный отрезок, началом которого является Солнце — точка, совпадающая с фокусом эллиптической траектории, описываемой каждой планетой; конец же этого вектора совпадает с движущейся точкой — планетой.

Леонардо да Винчи

Однако в рассматриваемую эпоху в естествознании еще не оформилось четко понятие векторной величины, а идея алгебраических действий с направленными отрезками лишь зарождалась. Развитие настоящего векторного исчисления относится к XIX в.

36. Пути развития векторного исчисления

Исторически развитие векторного исчисления шло тремя путями: геометрическим (исчисление отрезков), физическим (исследование векторных величин, встречаемых в естествознании) и алгебраическим (расширение понятия операции при создании современной алгебры).

Начала исчисления направленных отрезков были впервые изложены уроженцем Норвегии Каспаром Весселем в мемуаре «Опыт об аналитическом представлении направления и его применениях, преимущественно к решению плоских и сферических многоугольников», опубликованном в «Трудах Датской Академии наук» в 1799 г. В этой Академии Вессель работал на протяжении всей своей сознательной жизни в должности «тригонометрического оператора», т. е. в качестве геодезиста, картографа и землемера. «Опыт» Весселя обычно упоминается в истории математики как первое сочинение, специально посвященное геометрической интерпретации (истолкование) комплексных чисел, что, конечно, верно. Однако сам Вессель создал свой труд, исходя из других, чисто практических задач и с целью облегчения труда геодезиста-землемера. Стремясь для этой цели построить «геометрическое исчисление», в котором алгебраическими методами можно было бы находить отрезки по величине и направлению, Вессель пишет: «Обычный взгляд на алгебраические операции позволяет изменять направление только на противоположное, т. е. положительное на отрицательное и наоборот». Для произведения же алгебраических операций над отрезками любых направлений следует «расширить определения алгебраических операций, но так... чтобы не было проти-

воречия со старой теорией чисел... Таким образом, переходя от арифметики к геометрическому анализу, т. е. от операций над абстрактными числами к операциям над отрезками прямой, ... мы увидим, что геометрические операции, в известном смысле, будут более широкими, чем арифметические»... «Общие доказательства геометрических теорем станут более легкими, когда мы научимся выражать направления некоторым аналитическим способом».

Векторную алгебру на плоскости (или, выражаясь геометрически, двумерное векторное пространство) Вессель строит почти так же, как она изложена в наших учебниках. Для иллюстрации приведем его определение суммы нескольких векторов, следующее за определением суммы двух направленных отрезков: «Чтобы сложить более двух отрезков, нужно следовать тому же правилу: располагаем их так, чтобы конец первого совпадал с началом второго, а конец второго совпадал с первой точкой третьего и т. д , затем соединяем отрезком ту точку, где первый отрезок начинается, с той точкой, где последний отрезок оканчивается, и называем этот последний отрезок суммой всех данных отрезков».

Вессель подчеркивает, что расширенное понятие сложения включает как частный случай и старый смысл этого действия. Действительно, он пишет: «Если складываемые отрезки одинаково направлены, то это определение суммы вполне согласуется с обычным сложением». Здесь выполняется так называемый принцип перманентности, положенный во второй половине XIX в. в основу расширения понятия о числе и других математических понятий. Свой метод исчисления направленных отрезков Вессель применяет к выводу некоторых формул прямолинейной тригонометрии, связанных с практическими геодезическими задачами. Он строит также исчисление направленных отрезков в пространстве (т. е. трехмерное векторное пространство) и, развивая оригинальную «алгебру вращения сферы», применяет ее к решению сферических треугольников и многоугольников, к выводу необходимых для практической геодезии формул сферической тригонометрии. Работа Весселя является ярким примером огромного влияния, оказываемого практикой на развитие математики. Следует также отметить, что в труде Весселя нет никаких примеров из области механики или физики. «Опыт» Весселя свидетельствует о том, что именно удовлетворение потребностей прикладной геометрии привело к развитию векторного исчисления.

Последний факт подтверждается и работой Л. Карно «Геометрия положения для тех, кто готовится к измерению земель», изданной в 1803 г. и предвосхитившей некоторые основные идеи проективной геометрии и топологии.

Термин «геометрия положения» заимствован из того же письма Лейбница Гюйгенсу, отрывок из которого был приведен выше: Лейбниц предложил называть новую область математики, о которой он пишет в этом письме, *анализом положения* (*analysis situs*) или *геометрией положения* (*geometria situs*). Книга Карно занимает

видное место и в истории векторного исчисления. В ней Карно вводит понятие *геометрического количества*, под которым он подразумевает в основном направленный отрезок, и занимается действиями над ориентированными фигурами, в частности отрезками. До него положительные и отрицательные отрезки рассматривались лишь в пределах одной прямой, он же ввел отрезки, имеющие любое направление, и фактически проложил путь к векторному исчислению. У Карно отсутствует систематическое исчисление направленных отрезков, содержащееся у Весселя. Однако «Опыт» последнего не оказал никакого влияния на развитие векторного исчисления, так как на протяжении целого столетия ученые не обращали[1] на него внимания, в то время как понятие *геометрического количества* Карно стали употреблять передовые математики уже в самом начале XIX в. Некоторые введенные Карно термины и символы, в частности обозначение вектора с помощью черты наверху ($\overline{AB}$, $\overline{C}$), сохранились и поныне.

В сочинении по аналитической и проективной геометрии «Барицентрическое исчисление» (1827) немецкий математик А. Мебиус в известной мере продолжил труд Карно и систематизировал идеи последнего. Он, в частности, впервые представлял геометрическое количество AB в виде разности точек: $B - A$.

Швейцарский математик Жан Арган (1768—1822) под влиянием идей Карно написал в 1806 г. «Опыт о способе изображения мнимых количеств в геометрических построениях». Арган ставит и корректно решает задачу построения исчисления направленных отрезков, которые он называет «направленными линиями». Свой метод он применяет для решения различных задач геометрии, алгебры и механики. Примерно в то же время появился и ряд других работ (М. Бюэ, Дж. Уоррена и др.), в которых делаются попытки обобщения алгебраических понятий таким образом, чтобы «числами» и «величинами» охватить отрицательные и комплексные числа и направленные отрезки. Соответственным образом расширяется понятие алгебраической операции с соблюдением принципа перманентности.

Дальнейшее развитие векторного исчисления связано с исследованиями У. Гамильтона и Г. Грассмана по гиперкомплексным числам. Первый дал строгое изложение алгебры комплексных чисел и создал учение о кватернионах, которое явилось одним из алгебраических источников развития современного векторного исчисления. Он впервые стал применять термин «вектор» и оперировать с векторами в трехмерном пространстве. Основы векторной алгебры и векторного анализа были изложены Гамильтоном в его «Лекциях

---

[1] Этому способствовали три обстоятельства: 1) Вессель не был известен в мире ученых; 2) его труд был напечатан на датском языке, недоступном для великих ученых того времени, и 3) идеи Весселя несколько опередили свое время.

о кватернионах (1853)[1], в которых впервые появляются термины «скаляр» (от латинского scala — лестница; подобно ступенькам лестницы, можно упорядочить *действительные* числа, вводя понятия «больше» и «меньше», но не комплексные числа, не *векторы*) и «вектор». Тут же встречаются термины *скалярное произведение* и *векторное произведение*. Почти одновременно независимо от Гамильтона к понятию вектора пришел и Грассман, изложивший основы векторного исчисления в 1844 г. в работе «Учение о протяженности», написанной в геометрическом духе. В ней впервые излагается учение об n-мерном евклидовом пространстве. Это «Учение» содержит как частный случай теорию векторов на плоскости и в трехмерном пространстве. Свой метод геометрического исчисления Грассман применял и к исследованию кривых. Векторы, названные им *палочками*, он обозначал жирными буквами латинского алфавита. Скалярное произведение векторов, названное им *внутренним произведением*, он обозначал $a \mid b$; векторное произведение, названное им *внешним произведением*, он обозначал $[a, b]$.

В создании трудов вышеуказанных ученых, развивших векторное исчисление, кроме уже названных мотивов, большую роль сыграли запросы естествознания. Вместе с тем для ряда других ученых эти запросы были единственным мотивом проявления интереса к векторному исчислению. Этот третий путь развития учения о векторах начался, как мы видели, еще в XVI—XVII вв. В частности, во второй половине XIX в. эта линия развития продолжалась в трудах знаменитого французского ученого-механика, внесшего огромный вклад в теорию упругости, Сен-Венана (1797—1886), в «Рациональной механике» видного русского ученого И. И. Сомова, в работах одного из создателей теории электромагнитного поля, выдающегося английского физика Джемса Кларка Максвелла (1831—1879), систематически применявшего в своем «Учении об электричестве и магнетизме» (1873) векторное исчисление. Однако современный вид придали векторному исчислению в конце XIX в. американский физик, один из основателей химической термодинамики и статистической механики — Дж. Гиббс (1839—1903), примкнувший в своих «Элементах векторного анализа» (1881—1884) к идеям Грассмана, и английский физик О. Хевисайд (1850—1925), применивший векторы в своей «Электромагнитной теории» (1893). В последней четверти прошлого столетия происходит слияние, синтез трех путей (геометрического, алгебраического и физического) исторического развития и трех источников формирования векторного исчисления. Векторное исчисление становится независимой ветвью математики.

Наряду с векторной алгеброй, изучающей постоянные векторы, Гамильтон создал и векторный анализ, изучающий переменные векторы — векторные функции, и определил производные скалярной функции по векторному аргументу (градиент) и некоторые виды

---

[1] Первая публикация в 1843 г.

производных вектор-функций векторного аргумента — дивергенцию и роторы. Векторное исчисление еще с конца XIX в. систематически применялось в теории электромагнитного поля и гидродинамике, а в XX в. оно стало применяться и в теоретической механике, а также в аналитической и дифференциальной геометрии.

37. Геометрические преобразования

В XIX в. наряду с синтетической развивалась и аналитическая проективная геометрия, виднейшими представителями которой были немецкие математики Август Фердинанд Мёбиус (1790—1868) и Юлиус Плюккер (1801—1868), французский геометр Мишель Шаль (1793—1880) и др. Мёбиус впервые ввел в проективную геометрию систему координат. Его важнейшее произведение, опубликованное в 1827 г., озаглавлено «Барицентрическое исчисление»; название это связано с введением автором барицентрических (*барицентр* — центр тяжести) координат точек. Если в трех неколлинеарных точках A, B, C помещены массы m_1, m_2, m_3, то соответствующий центр тяжести M имеет массу $m = m_1 + m_2 + m_3$, и обратно; числа m_1, m_2, m_3 и названы барицентрическими координатами точки M. Увеличивая (уменьшая) массу m точки M в n раз, ее координаты m_1, m_2, m_3 также увеличиваются (уменьшаются) в n раз. Поэтому для определения положения точки M на плоскости достаточно знать отношение $m_1 : m_2 : m_3$. Аналогично рассматриваются такие координаты и в пространстве. Барицентрические координаты являются частным случаем общих *однородных* координат, введенных Плюккером и с успехом применяемых тогда, когда речь идет о несоответственных элементах прямой, плоскости или пространства. Так, например, пусть x, y — декартовы координаты точки N плоскости. Полагая

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \tag{1}$$

получаем в качестве трех однородных координат точки N числа x_1, x_2, x_3 и обозначаем $N(x_1, x_2, x_3)$. Уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ мы теперь в силу (1) запишем так:

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0. \tag{2}$$

Уравнение это однородное. Далее, уравнение

$$x_3 = 0 \tag{3}$$

представляет собой несобственную прямую данной плоскости, содержащую все несобственные точки прямых, в ней лежащих.

Мёбиус установил общее понятие проективного преобразования, рассматривая *коллинеации*. Под коллинеарными преобразованиями, или коллинеациями, понимают общие взаимно однозначные соответствия, установленные между элементами (точками и прямыми) двух плоскостей в пространстве (в частности, совпадающих плоскостей), при которых каждой точке (прямой) одной плоскости соответствует точка (прямая) другой и сохраняется инцидентность соответствующих элементов. Оказывается, что *коллинеации обладают проективными свойствами*, т. е. проективны соответственные формы первой ступени (ряды, пучки) двух плоскостей, между которыми установлена коллинеация.

Одновременно развивалась *аффинная геометрия*, изучающая свойства геометрических фигур, инвариантных при любых *аффинных преобразованиях*, т. е. таких, которые, переводя точку в точку и прямую в прямую, сохраняют при этом простое отношение трех точек прямой. Сохранение коллинеарности и простого отношения трех точек прямой влечет за собой и ряд других инвариантов аффинных преобразований, в том числе параллелизм прямых, отношение двух параллельных отрезков, отношение площадей двух фигур и т. п. Известными из средней школы частными случаями аффинных преобразований являются осевая и центральная симметрия, гомотетия, параллельный перенос и др. Отдельные аффинные преобразования встречаются еще в древности (у Аполлония, Паппа).

В связи с развитием перспективы некоторые математики XVI—XVII вв. — С. Стевин, Г. Санкт-Винцент и особенно французский математик П. Никола́ — применяли в своих работах преобразование, переводящее окружность в эллипс и называемое *сжатием*[1]. В своих «Геометрических исследованиях конхоид и циссоид» Никола говорит о том, что эллипс является *однородной фигурой* с окружностью.

В своей «Всеобщей арифметике» (1707) Ньютон пользуется преобразованием подобия. В другом (единственном, специально посвященном геометрии) произведении И. Ньютона — «Перечисление линий третьего порядка» (1704) имеется раздел, озаглавленный «Образование кривых с помощью теней», в котором автор пишет: «Если на бесконечную плоскость отбрасывать от светящейся точки тени фигур, то тенями конических сечений будут всегда тоже конические сечения...» Под «отбрасыванием тени» Ньютон понимал то, что мы теперь выражаем термином «центральное проектирование» («проекция» и происходит от латинского слова *projicio* — бросаю вперед). Ньютон рассматривает некоторые частные случаи проективных преобразований и называет фигуры (данную и преобразованную из нее) фигурами одного и того же рода. В 22-й лемме сво-

---

[1] Сжатие применялось еще Архимедом, а в средние века Ибн Синан (X в.) — внук Сабита Ибн Корры — применял аффинные преобразования.

их знаменитых «Математических начал натуральной философии» (1686) Ньютон рассматривает проективные преобразования как отображения плоских фигур. Вообще, ньютоновское понятие пространства в целом как вместилища тел (и точек) послужило первым этапом на пути к формированию современного понятия геометрического преобразования плоскости и пространства.

В 18-й главе 2-го тома «Введения в анализ» Эйлера речь идет о преобразованиях подобия и родства. Здесь Эйлер вводит термин «аффинный» (лат. *affinis*), буквально означающий «находящийся в свойстве́» — родстве по жене. Этим термином Эйлер, который вводит *аффинное преобразование как обобщение подобного преобразования*, желал подчеркнуть, что степень родства между аффинными фигурами меньше, чем та, которая имеется в случае подобных фигур. *Частным случаем подобия Эйлер считает подобие и равенство*, т. е. *конгруэнтность*. В другой своей работе — «О центре подобия» (1795) Эйлер ввел понятие *центра подобия* двух подобных фигур и доказал ряд основных теорем о подобии; он также рассматривал случай *гомотетичного расположения фигур* и подобные тела в пространстве.

До Эйлера понятием (но не термином) аффинного преобразования и частного случая этого преобразования — *сдвига* — пользовался французский математик А. К. Клеро в написанной им в 18-летнем возрасте работе «О кривых, которые образуются пересечением какой-либо кривой поверхности плоскостью, известной по положению» (1733). Аффинные кривые Клеро называл «кривыми того же вида». Этот термин Клеро, как и вышеупомянутый термин Ньютона «кривые того же рода», берет свое начало от Аристотеля, согласно которому логическое определение должно содержать ближайшее *родовое* понятие и *видовое* отличие. Уже одни эти термины Ньютона и Клеро в известной мере предвосхитили идею о том, что множество аффинных преобразований — это частный случай множества проективных преобразований. У Эйлера подобие выступает как частный случай аффинного преобразования, а конгруэнтность — как частный случай подобия. Таким образом, в XVIII в. трудами Ньютона, Клеро и особенно работами Эйлера был в большой мере подготовлен расцвет учения о геометрических преобразованиях, наступивший в следующем, XIX столетии.

В прошлом веке много внимания было уделено конформным преобразованиям. Как и подобие, *инверсия* (от латинского слова *inversio* — обращение) *относительно окружности* является одним из видов конформного (от латинского слова *conformis* — одной и той же формы) *преобразования*, сохраняющего углы между линиями. В работе «Соображения об ортогональных траекториях» (1769) Л. Эйлер положил начало теории общих конформных отображений (применив их затем в картографических работах), рассматривая *конформные преобразования на плоскости*. Последние Эйлер определяет как преобразования плоскости комплексного переменного

с помощью аналитических функций этого переменного. *Конформные преобразования пространства* впервые рассматривал в середине XIX в. Ж. Лиувилль, доказавший следующую теорему, носящую его имя: *конформные преобразования пространства переводят сферы в сферы или плоскости.* Теория конформных преобразований тесно связана с учением о комплексных числах, с теорией аналитических функций. Конформные отображения издавна находят применение в картографии[1], а в наш век — в аэро- и гидромеханике, в электростатике и других областях физики и механики[2].

Известно, что инверсия относительно окружности является круговым преобразованием, переводящим окружности в окружности или прямые. Учение о круговых преобразованиях на плоскости было впервые построено Мёбиусом в его «Теории кругового сродства в чисто геометрическом изложении» (1855). Именно от работ Лиувилля и Мёбиуса (1790—1868) берет свое начало так называемая конформная геометрия, изучающая свойства фигур, инвариантные при любых конформных преобразованиях.

Мёбиус занимался также аффинными преобразованиями в своем «Барицентрическом исчислении» (1827). Развитию аффинной геометрии в большой мере способствовала работа Г. Грассмана «Учение о протяженности», опубликованная в 1844 г.

К 70-м годам XIX в. уже было накоплено много сведений относительно разных геометрических преобразований. Актуальной стала задача их классификации и общей систематизации. Эту задачу выполнил немецкий математик Феликс Клейн в работе «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», известной как «Эрлангенская программа» и названной так в честь Эрлангенского университета, где при вступлении в должность профессора этого университета в 1872 г. Клейн впервые изложил содержание этой работы. Еще раньше появился первый систематический труд по теории групп (и теории Галуа), написанный французским математиком Камилом Жорданом (1838—1922). Именно понятие группы было положено Клейном в основу классификации геометрических преобразований и соответствующих ветвей геометрии.

С помощью этого понятия Клейн как бы наводит порядок в геометрии. Нетрудно убедиться в том, что группу образует множество всех коллинеаций (т. е. проективных преобразований); это так называемая *проективная группа*, часто обозначаемая $\{K\}$; группу образует также множество всех аффинных преобразований—*аффинная группа* $\{A\}$; множество всех преобразований подобия, называемых *метрическими* преобразованиями, образует *метрическую*

---

[1] См. гл. VI, § 22.

[2] См.: Маркушевич А. И. Комплексные числа и конформные отображения. М., 1954.

группу $\{M\}$; *группу движений* $\{\omega\}$ образует множество всех геометрических преобразований, названных движениями (симметрия, поворот, перенос). Здесь группы перечислены нами в таком порядке, что каждая последующая группа является, как показали Кэли (1821—1895) и Клейн, *подгруппой* предыдущей, т. е.

$$\{\omega\} \subset \{M\} \subset \{A\} \subset \{K\}. \qquad (1)$$

Это и есть групповая классификация Клейна, основные идеи которого сводятся к следующему.

Геометрия есть учение о преобразованиях, образующих группы. Каждую геометрию можно охарактеризовать соответствующей ей группой, предмет же ее состоит в изучении свойств геометрических фигур, инвариантных относительно данной группы преобразований. Так, например, метрическая геометрия изучает свойства фигур, инвариантных при всех преобразованиях группы подобия $\{M\}$, названной Клейном также *главной группой.*

Вышеуказанная классификация (1) позволяет считать как аффинную, так и метрическую геометрию как частные случаи проективной геометрии[1].

Таким образом, ясно вырисовываются основные черты исторического развития проективной геометрии: появившись еще в древности из недр классической метрической геометрии как незначительная ее часть, она развивается в XVII в. благодаря трудам Дезарга и Паскаля и становится затем в XIX в. автономной ветвью геометрии, независимой от метрической геометрии, чему способствовали исследования Понселе, Штейнера и Штаудта. Труды же Кэли и Клейна выявили, что в действительности метрическая геометрия является лишь частью более широкой проективной геометрии. Частью проективной геометрии оказалась не только евклидова, но и неевклидова геометрия Лобачевского и Римана. Вот почему А. Кэли писал: «Проективная геометрия — это вся геометрия!» Однако, как увидим, дальнейшее развитие геометрии, в частности топологии, опровергло это мнение.

Групповая точка зрения на геометрию привела к созданию новых теорий и в других областях математики[2]. В конце XIX в. началась разработка аксиоматики проективной геометрии, которая была продолжена в XX в. рядом виднейших математиков, в том числе академиком Андреем Николаевичем Колмогоровым.

---

[1] Группа $\{A\}$ первоначально не фигурировала в «Эрлангенской программе». Она была включена Клейном в середине 90-х годов XIX в. Термин же «подгруппа», восходящий к С. Ли, был впервые применен Клейном в 1893 г.

[2] В частности, переход от группы перестановок, связанной с теорией решения алгебраических уравнений, к группам геометрических преобразований открыл путь к развитию учения о бесконечных группах и к абстрактной теории групп.

§ 6. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ. МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

От «Начал» Евклида шли все замыслы дальнейшего более совершенного обоснования геометрии.

В. Ф. Каган

38. Перпендикулярность прямой к плоскости у Евклида, Коши и Лежандра

Последние три (XI—XIII) книги «Начал» содержат почти исключительно стереометрический материал. В XI книге, в частности, излагаются общие основы стереометрии, вопросы взаимного расположения, включая параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, как и учение о призмах и параллелепипедах. Этот материал, включенный в прошлом в школьные издания «Начал», в большей своей части входит и в настоящее время в учебники стереометрии. Одиннадцатая книга «Начал» начинается 28 определениями, среди которых имеются и следующие: *прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна ко всем прямым, проведенным в плоскости в точке, в которой она эту плоскость встречает*. Этому определению должно было бы предшествовать доказательство того, что такая прямая существует, чего у Евклида нет. Кроме этого, приведенное определение не дает практического критерия, чтобы установить, перпендикулярна ли данная прямая к данной плоскости или нет, ведь углов, образованных всеми прямыми плоскостями с данной прямой, не измеришь. Эти недостатки Евклид устраняет с некоторым опозданием, доказывая в 4-м предложении той же книги следующую т е о р е м у: *если прямая образует с двумя пересекающимися прямыми в точке их пересечения прямые углы, то она перпендикулярна ко всякой прямой, которая проходит в плоскости, содержащей эти две прямые, через точку их пересечения*. Доказательство этой теоремы, данное Евклидом, длинное и сложное. Приведенное в наших учебниках доказательство принадлежит О. Коши (XIX в.). Третье доказательство этого предложения дал А. Лежандр. Вот оно.

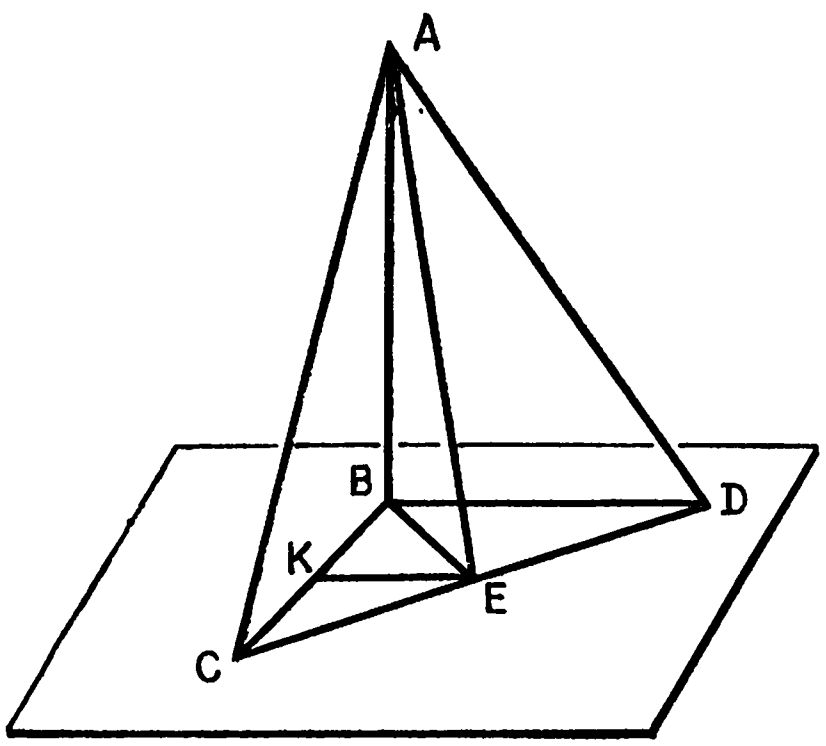


Рис. 19.

Проведем из середины K (рис.19) отрезка CB прямую $KE \parallel BD$ и соединим точку E пересечения BE с KE с точкой C. Имеем: $CE = ED$. Учитывая

соотношение между медианой и сторонами (по теореме Стюарта, см. ниже, § 25, задача 24), получим для $\triangle ACD$:

$$AC^2 + AD^2 = 2AE^2 + 2ED^2;$$

для $\triangle BCD$:

$$BC^2 + BD^2 = 2BE^2 + 2ED^2.$$

Полученное вычитание дает:

$$AC^2 - BC^2 + AD^2 - BD^2 = 2AE^2 - 2BE^2. \qquad (1)$$

По теореме Пифагора имеем для треугольников ABC и ABD:

$$AC^2 - BC^2 = AB^2, \quad AD^2 - BD^2 = AB^2,$$

в силу чего из (1) получаем:

$$2AB^2 = 2AE^2 - 2BE^2, \text{ откуда } AE^2 = AB^2 + BE^2.$$

Последнее равенство согласно обратной теореме Пифагора означает, что угол ABE — прямой, т. е.

$$AB \perp BE.$$

Следует отметить, что доказательство Лежандра, опирающееся на теорему Пифагора, тем самым основывается и на аксиоме параллельности Евклида. В отличие от Лежандра Евклид и Коши излагают доказательства, принадлежащие абсолютной геометрии.

39. Теорема о трех перпендикулярах

Имеющая большое значение в настоящее время, теорема о трех перпендикулярах в «Началах» Евклида не содержится. Она была доказана математиками Ближнего и Среднего Востока: ее доказательство имеется в «Трактате о полном четырехстороннике» Насир ад-Дина ат-Туси и в тригонометрическом трактате его анонимного предшественника. В Европе эта теорема была впервые сформулирована Луи Бертраном (1731—1812) и доказана в «Элементах геометрии» Лежандра (1794). Последний ее так сформулировал: пусть прямая AP (рис. 20) перпендикулярна к плоскости Q, а точка P — ее основание и пусть BC — произвольная прямая этой плоскости. Проведем из P прямую $PD \perp BC$ и соединим точки A и D; тогда прямая AD тоже будет перпендикулярна к BC. Доказательство Лежандра воспроизведено в учебнике Киселева.

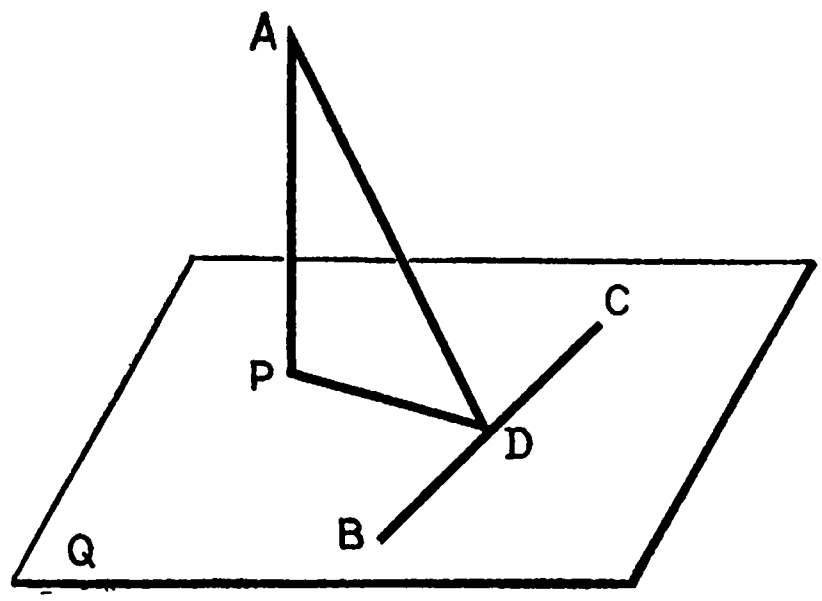


Рис. 20.

40. Двугранные и многогранные углы

Понятия двугранного, трехгранного, многогранного угла берут свое начало от исследования геометрических форм разных кристаллов и из практики строительства различных сооружений.

Учение о двугранных и многогранных углах принадлежит абсолютной геометрии, несмотря на то что соответствующие доказательства прямо или косвенно основываются у Евклида и обычно в наших учебниках на евклидовой аксиоме параллельности. Существуют и другие доказательства.

Теорему о том, что сумма плоских углов при вершине выпуклого многогранника меньше $4d$, Евклид формулирует для общего случая, но доказывает ее только для случая трехгранного угла. Для общего случая эта теорема была доказана некоторыми комментаторами «Начал», в том числе Тартальей и Клавиусом. Общее доказательство этого предложения изложил в «Элементах геометрии» и Лежандр.

Впрочем, на протяжении многих веков предложение, о котором идет речь, считалось очевидным в силу его наглядного характера. Действительно, развертывая любой выпуклый многогранный угол на плоскости с помощью разреза вдоль какого-нибудь его ребра, мы констатируем, что он никогда не покрывает полностью плоскость и оставляет свободное место для определенного угла.

Глава III.
АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

§ 7. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Напрасно думают, что она (фантазия) нужна только поэту. Это глупый предрассудок! Даже в математике она нужна, даже открытие дифференциального и интегрального исчислений невозможно было бы без фантазии.

В. И. Ленин

41. Происхождение понятия определенного интеграла

Понятие интеграла и интегральное исчисление возникли из потребности вычислять площади любых фигур и поверхностей и объемы произвольных тел. Предыстория интегрального исчисления восходит к глубокой древности. Идея интегрального исчисления была древними учеными предвосхищена гораздо в большей мере, чем идея дифференциального исчисления. Мы уже говорили о методе исчерпывания Евдокса. Ниже пойдет речь о формировании понятия интеграла в XVII в. и о его дальнейшем развитии Об интеграционных методах Архимеда рассказано в п. 42. Чтобы дать общий обзор проблемы об интегральном исчислении, начнем с постановки вопроса.

Пусть требуется найти площадь S криволинейной фигуры $A'C'B'D'$ (рис. 21). Отнесем ее к декартовой прямоугольной системе координат XOY и опустим из крайних точек A' и B' (имеющих наименьшую и наибольшую абсциссы) нашей фигуры перпендикуляры $A'A$ и $B'B$ на ось Ox. Площадь S представится тогда как разность между площадью S_1 фигуры $AA'C'B'B$ и площадью S_2 фигуры $AA'D'B'B$. Отсюда ясно, что задачу вычисления площади произвольной фигуры можно свести к задаче вычисления площади фигуры вроде $AA'C'B'B$, ограниченной дугой некоторой кривой, двумя ординатами $A'A$ и $B'B$ и отрезком AB оси абсцисс, заключенным между этими ординатами. Такую фигуру принято называть *криволинейной трапецией.*

Итак, пусть требуется найти площадь S криволинейной трапеции $ABCD$ (рис. 22), где DC — дуга линии $y = f(x)$. Для этого разделим точками основание AB нашей трапеции на n (вообще неравных) частей:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b. \qquad (1)$$

Длины участков $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $x_n - x_{n-1}$ обозначим через Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n. Проведя ординаты, соответствующие точкам

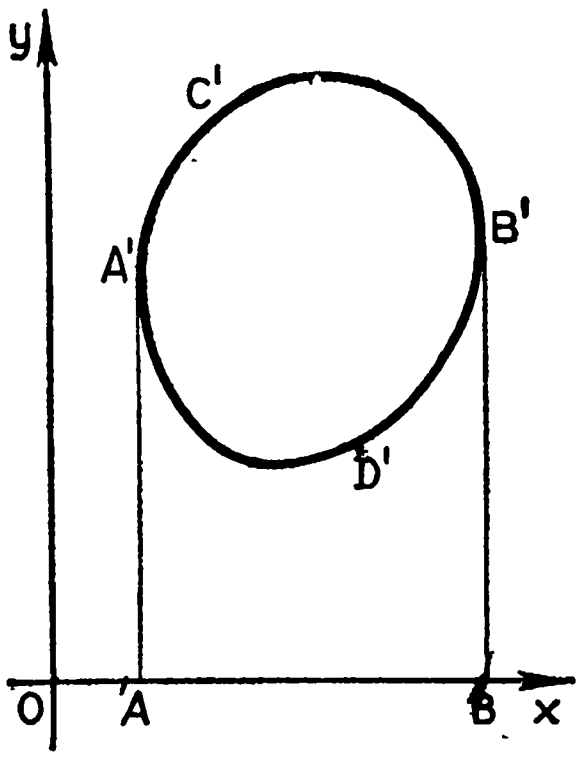


Рис. 21.

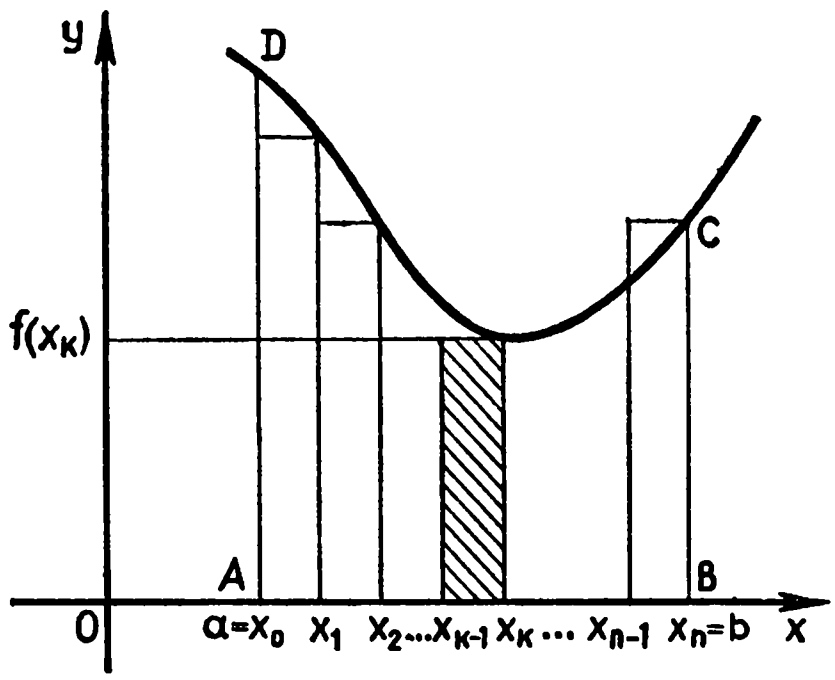


Рис. 22.

деления, мы разбиваем трапецию на n полосок с основаниями Δx_1, Δx_2, ..., Δx_k, Δx_{k+1}, ..., Δx_n. Заменяя каждую полосу некоторым прямоугольником, в котором основанием служит основание соответствующей полосы, а высотой — одна из ординат (допустим, левая) полосы, мы как бы заменяем нашу фигуру $ABCD$ другой, ступенчатой фигурой T, площадь которой равна сумме S_n площадей построенных n прямоугольников. Площадь каждого из последних равна произведению высоты на основание, т. е. $f(x_k)\Delta x_k$, или $y_k\Delta x_k$, где $k = 1, 2, \ldots, n$. Итак,

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n, \qquad (1)$$

коротко[1]:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k, \quad \text{или} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} y_k \Delta x_k. \qquad (2)$$

Формула (1) или (2) дает лишь приближенную площадь криволинейной трапеции, но с неограниченным увеличением числа n, т. е. с неограниченным убыванием длин участков Δx_k, ступенчатая фигура T неограниченно приближается к фигуре $ABCD$, и мы можем достигнуть любой степени приближения. Поэтому точное значение S мы получим как предел суммы S_n, когда наибольшая из длин Δx_k стремится к нулю. Этот предел и называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$ или $\int_a^b ydx$. Символ $\int ydx$ был введен Лейбницем в 1686 г. В нем знак $\int$ представляет как бы удлиненную букву S (первая в латинском слове Summa — сумма); ydx напоминает структуру слагаемых суммы.

---

[1] Σ — греческая буква «сигма». В своем «Дифференциальном исчислении» Эйлер пишет: «Как для обозначения разности мы пользовались знаком Δ, так сумму мы будем обозначать знаком Σ». См.: Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М., 1949, с. 62.

Термин «интеграл» (от латинского *integer* — целый, т. е. целая, *вся* — площадь) был предложен в 1696 г. Иоганном Бернулли и одобрен, хотя и неохотно, Лейбницем, который до этого пользовался выражением «сумма всех ydx».

К понятию определенного интеграла приводят и другие задачи геометрии, механики и физики, в которых требуется найти предел так называемой интегральной суммы, т. е. выражения

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Здесь ξ_i — произвольная точка[1] на участке Δx_i.
Итак,

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Последнее обозначение для определенного интеграла ввел Ж. Фурье. Числа a и b называют соответственно нижним и верхним пределами интеграла. Если функция $f(x)$, называемая подынтегральной, непрерывна, то предел, о котором идет речь, существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на участки Δx_i, ни от выбора на них точек ξ_i. Функцию $f(x)$ называют в этом случае *интегрируемой*. В такой общей форме (3) это определение интеграла было впервые сформулировано немецким математиком Б. Риманом примерно в середине прошлого века. Поэтому интегральную сумму σ иногда называют римановой суммой.

42. Инфинитезимальные методы Архимеда

В своем сочинении «Квадратура параболы» Архимед пользуется методом исчерпывания для вычисления площади сектора параболы, этот же метод или его варианты он применяет для определения площадей и объемов других фигур. Продолжая развивать идеи своих предшественников, Архимед определил длину окружности и площадь круга, объем и поверхность шара. Он показал, что определение объемов шара, эллипсоида, гиперболоида и параболоида вращения сводится к определению объема конуса (значит, и к объему цилиндра). При этом Архимед разработал и применил методы, предвосхитившие созданное в XVII в. интегральное исчисление. Следует особо упомянуть об одном интеграционном методе Архимеда, примененном в следующих его произведениях, последовавших за «Квадратурой параболы»: «О шаре и цилиндре», «О спиралях» и «О коноидах и сфероидах». В последнем произведении рассмотрены объемы сегментов, получаемых при сечении плоскостью тел, образованных вращением вокруг оси эллипса, параболы или гиперболы. В терминологии Архимеда «прямоугольный коноид» — это параболоид вращения, «тупоугольный коноид» —

[1] В формуле (1) ξ_i совпало с наибольшим значением x_i участка Δx_i.

одна полость двуполостного гиперболоида вращения, «сфероид» — эллипсоид вращения. В XIX предложении своего произведения «О коноидах и сфероидах» Архимед доказывает следующую лемму[1]: «Если дан сегмент какого-нибудь из коноидов, отсеченный перпендикулярной к оси плоскостью, или же сегмент какого-нибудь из сфероидов, не больший половины этого сфероида и точно так же отсеченный, то можно вписать в него телесную фигуру и описать около него другую, состоящую из имеющих равную высоту цилиндров, и притом так, чтобы описанная фигура была больше вписанной на величину, меньшую любой наперед заданной телесной величины».

Пусть дан сегмент, как например АВГ, сечение его проведенной через ось плоскостью будет АВГΔ, сечение же отсекшей его плоскости пусть будет прямая АГ, а ось сегмента и диаметр сечения ВΔ (рис. 23). Поскольку секущая плоскость предполагается перпендикулярной к оси, то сечение будет кругом с диаметром ГА. Пусть на этом круге будет цилиндр, имеющий осью ВΔ; тогда его поверхность пройдет вне сегмента, поскольку последний является сегментом коноида или сфероида, не большим половины сфероида. Если этот цилиндр мы будем постоянно делить пополам перпендикулярной к оси плоскостью, то когда-нибудь получится остаток, меньший заданной телесной величины; пусть таким его остатком будет цилиндр, имеющий основанием круг на диаметре АГ, а осью ΔЕ, и который меньше заданной телесной величины. Разделим ВΔ в Р, О, П, Ξ, Е на равные ЕΔ части, через точки деления параллельно АГ проведем к коническому сечению прямые и на этих проведенных прямых восставим перпендикулярные к ВΔ плоскости; в сечениях получатся круги, имеющие центры на ВΔ. На каждом из этих кругов построим два цилиндра, оба с осью, равной ЕΔ, один

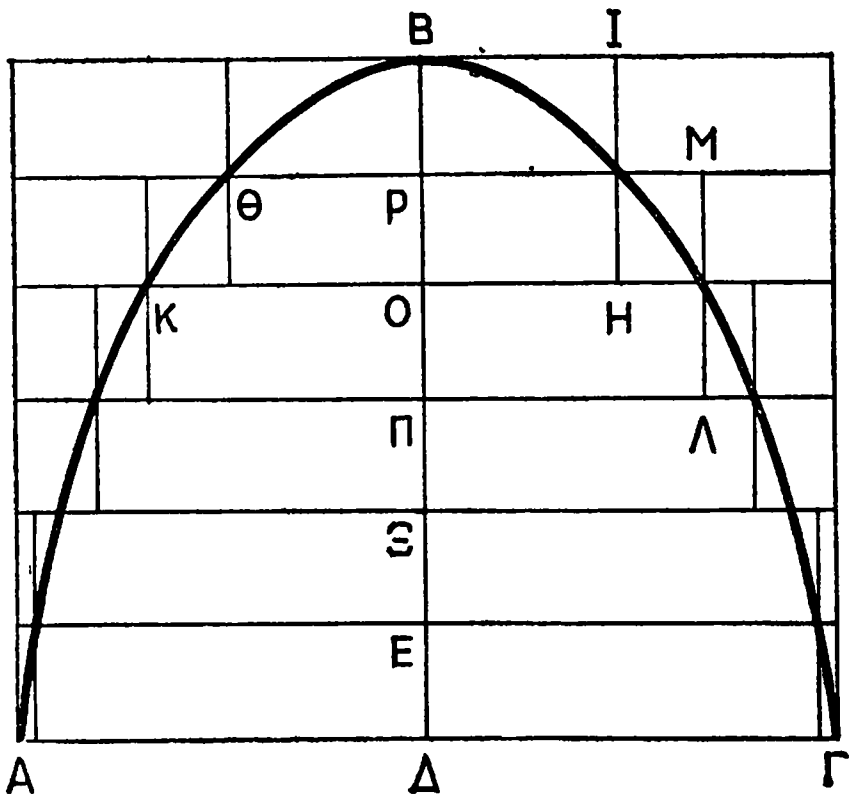


Рис. 23.

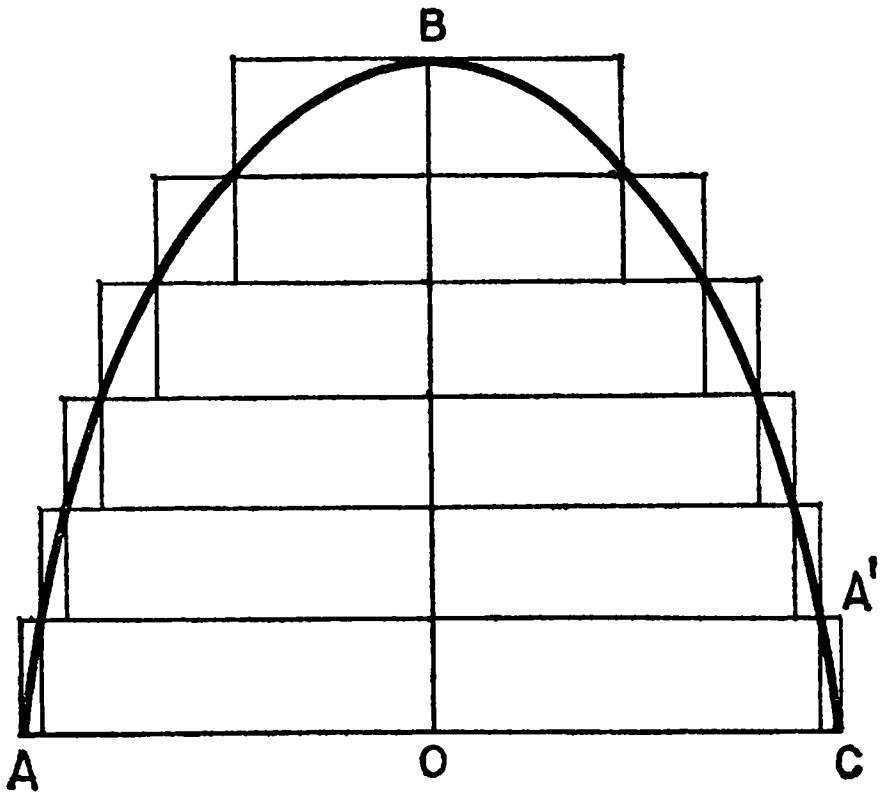


Рис. 24.

[1] См.: Архимед. Соч. М., 1962, с. 195, 451.

в ту сторону от круга, где находится Δ, другой же в ту, где находится B; таким образом, в сегменте получатся некоторые вписанная и описанная телесные фигуры, составленные из цилиндров, построенных в ту сторону, где находится B. Остается лишь доказать, что описанная фигура превосходит вписанную на величину, меньшую любой заданной телесной величины. Каждый из цилиндров во вписанной фигуре будет равен цилиндру, построенному на том же круге в ту сторону, где находится B, как например, цилиндр ΘH равен ΘI, цилиндр KΛ равен MK и точно так же и остальные, причем все вместе взятые такие цилиндры одной фигуры будут равны всем цилиндрам другой. Теперь ясно, что описанная фигура будет больше вписанной на цилиндр, имеющий основанием круг на диаметре AГ и ось ΔE; этот же цилиндр меньше заданной телесной величины.

Итак, разделив высоту BΔ сегмента коноида на n равных частей, Архимед образует вписанную и описанную фигуры, объемы которых равны v_n, соответственно V_n. Объем δ нижнего цилиндра, радиус основания которого равен ΔГ, а высота $h = \Delta E$, и представляет разность $V_n - v_n$. При $n \to \infty$ объем δ стремится к нулю.

Доказанную лемму Архимед использует для нахождения объемов сегментов коноидов (рис. 24). Он фактически вводит понятие интегральных сумм, верхних V_n и нижних v_n^1, и находит объем V полуэллипсоида как общий предел этих сумм при $n \to \infty$. Так же он определяет объем сегментов параболоида и гиперболоида вращения. Выражаясь современным языком, Архимед определил интегралы:

$$\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}, \quad \int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3},$$

$$\int_0^a (x^2 + bx)\,dx = \frac{a^3}{3} + \frac{a^2 b}{2}.$$

В своем произведении «О шаре и цилиндре» он по существу определил интегралы:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi = 1, \quad \int_0^{a} \sin\varphi\,d\varphi = -\cos\alpha + 1.$$

Конечно, у Архимеда нет еще общих понятий предела и интеграла, нет и общего алгоритма интегрального исчисления. Приведенные и другие его выкладки всегда связаны с решением конкретных геометрических задач без указаний на то, что в основе всех их лежит один и тот же общий прием арифметического суммирования сколь угодно малых частей фигуры. Несмотря на то что,

---

[1] См. предшествующую статью. Строгое определение понятия «интеграл» с помощью верхних и нижних интегральных сумм дал в XIX в. Б. Риман

например, квадратура параболы и кубатура сфероида сводятся к определению одного и того же интеграла, Архимед пользовался для решения этих задач различными методами. Тем не менее вклад Архимеда в развитие математики бесконечного вообще и в подготовку фундамента для создания интегрального исчисления огромен. Основная идея разложения фигуры на бесконечно малые части для вычисления ее площади или объема восходит, как мы уже знаем, по крайней мере к Демокриту, однако Архимед первый выработал методы соответствующего разложения и суммирования бесконечно малых с помощью хотя и молчаливого, но строгого предельного перехода.

В трудах Архимеда содержатся зачатки не только интеграционных, но и так называемых ныне дифференциальных методов. Среди них: 1) оригинальный метод нахождения касательной к спирали, названный его именем и изложенный в его сочинении «О спиралях». Здесь впервые встречается идея бесконечно малого «характеристического» треугольника, рассмотренного в XVII в. выдающимися учеными и явившегося для Лейбница одним из отправных пунктов при создании дифференциального исчисления; 2) метод решения задач на экстремумы.

В знаменитом сочинении «О шаре и цилиндре» Архимед исследует возможность геометрического решения кубического уравнения, ныне записываемого в виде $x^2(a - x) = bc^2$. Он нашел среди других, что левая часть этого уравнения для $0 < x < a$ достигает максимума при $x = \frac{2}{3}a$. Задача определения экстремума тесно связана у Архимеда с задачей определения касательной. Исходя из инфинитезимальных методов Архимеда, Кеплер и Кавальери развили в XVII в. теорию «неделимых», за которой последовали труды Ферма, Паскаля, Валлиса, Барроу и завершение создания исчисления бесконечно малых в трудах Ньютона и Лейбница.

43. От Архимеда к Кеплеру и Кавальери

Мы уже знаем, что Архимед в некоторых своих работах вычислял площади фигур и объемы тел, вписывая и описывая около них ступенчатые фигуры и вводя по существу понятие верхних и нижних интегральных сумм (рис. 25).

Однако Архимед еще не выделял и ясно не применял общие понятия предела и интеграла, уже не говоря о том, что он решал каждую задачу отдельно, не владея общим алгорифмом, созданным лишь 2000 лет спустя. Для дальнейшего развития зачаточных интеграционных методов Архимеда необходимо было предварительно создать и развить новую алгебру с ее символикой, ввести понятия переменных, функции и т. д.

Первые значительные попытки развития интеграционных методов Архимеда, увенчавшиеся успехом, были предприняты в XVII в., когда, с одной стороны, были достигнуты значительные

успехи в области алгебры, а с другой — все более интенсивно развивались экономика, естествознание и техника, требовавшие более общих и мощных математических методов изучения и вычисления величин.

Одним из первых видных ученых XVII в., стремившихся к возрождению и развитию интеграционных методов Архимеда, был Иоганн Кеплер, открывший законы движения планет. Первые два закона, опубликованные в 1609 г. в важнейшем его труде «Новая астрономия», мы ныне формулируем так: 1) каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце; 2) радиус-вектор, проведенный от Солнца к планете, в равные промежутки времени описывает равные площади. Не так сформулирован второй закон самим Кеплером. В «Новой астрономии» Кеплер писал, что «сумма радиус-векторов некоторой дуги орбиты относится к сумме радиус-векторов всего эллипса, как время, использованное для прохождения этой дуги, относится ко времени, требуемому для полного оборота на эллипсе». Эта формулировка говорит о том, что Кеплер рассматривал фигуру как состоящую из мелких частиц, отрезков. Вероятно, он и просуммировал, возможно, большое число радиус-векторов, исходя из некоторого правила их следования друг за другом. В современной формулировке законов Кеплера речь идет «о площадях, заметаемых радиус-вектором», а не «о сумме радиус-векторов». Однако Кеплер выбирал такие положения планет, что «сумма» оказывалась пропорциональной указанным площадям.

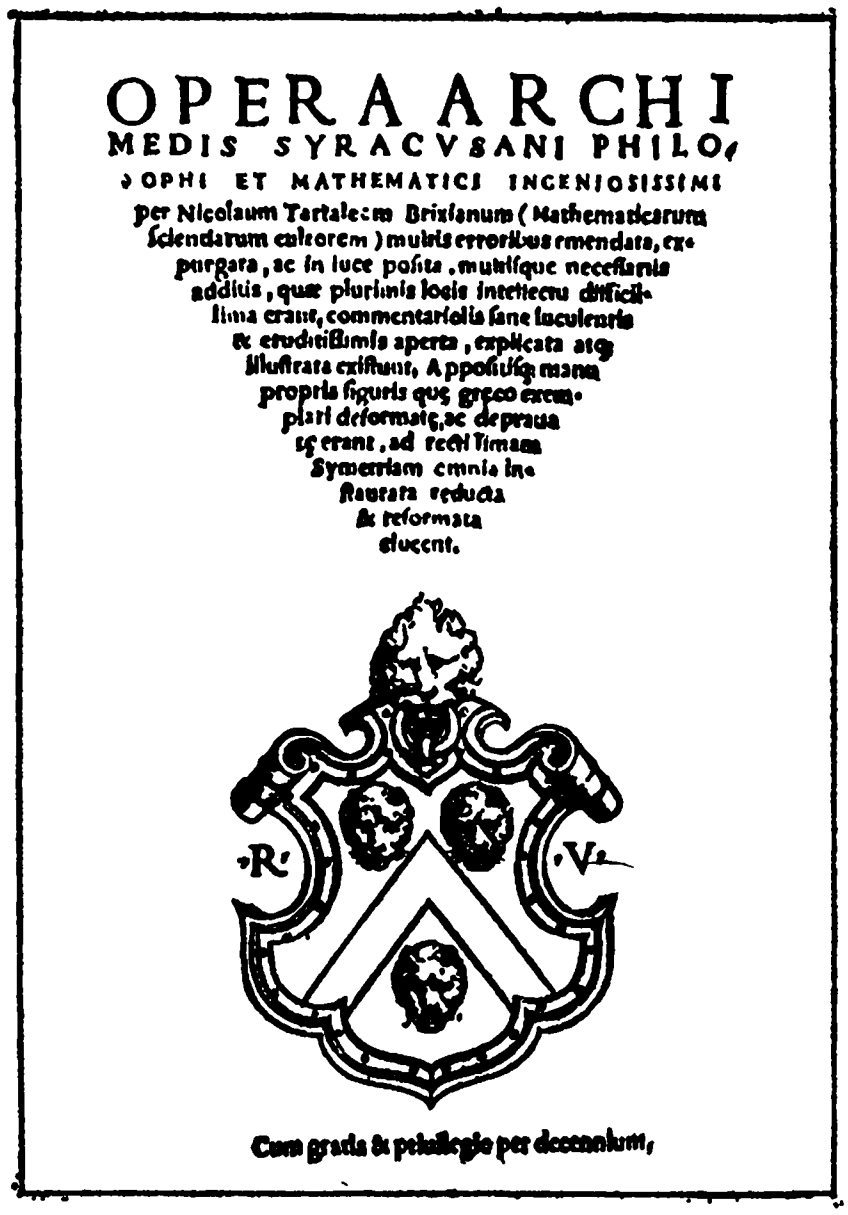

OPERA ARCHI
MEDIS SYRACVSANI PHILO-
SOPHI ET MATHEMATICI INGENIOSISSIMI
per Nicolaum Tartaleam Brixianum (Mathematicarum
scientiarum cultorem) multis erroribus emendata, ex-
purgata, ac in luce posita, multisque necessariis
additis, quæ plurimis locis intellectu difficil-
lima erant, commentariolis sane luculentis
& eruditissimis aperta, explicata atq;
illustrata exhibuit. Appositisq; manu
propria figuris quæ greco exem-
plari deformatæ, ac depraua
ut erant, ad rectissimam
Symmetriam omnia in-
staurata reducta
& reformata
fiuerent.
R V
Cum gratia & priuilegio per decennium,

Рис. 25. Титульный лист сочинений Архимеда, изданный Н. Тартальей в Венеции в 1543 г.

1612 г. был для жителей австрийского города Линца, в котором жил тогда Кеплер, и его окрестностей исключительно урожайным, особенно изобиловал виноград. Люди заготовляли винные бочки и хотели знать, как практически определять их объемы. Этот вопрос как раз и входил в круг идей, которыми интересовался Кеплер. Так родилась его «Новая стереометрия винных бочек», вышедшая в свет в 1615 г.

Кеплер вычислял площади плоских фигур и поверхностей и объемы тел, основываясь на идее разложения фигур и тел на бесконечное число бесконечно малых частей, которые он называл «тончайшими

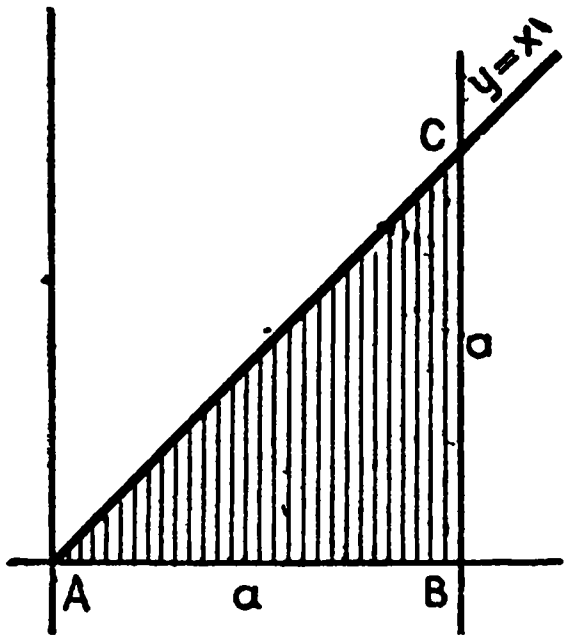


Рис. 26

кружочками» или «частями крайне малой ширины»; из этих мельчайших частиц, суммированных им, он составляет фигуру, эквивалентную первоначальной, но площадь или объем которой ему известен.

В отличие от Кеплера автор «Геометрии неделимых», Кавальери, считал свои «неделимые», линии и плоскости лишенными всякой толщины. Под термином «все линии» какой-либо плоской фигуры Кавальери понимал все же *сумму* этих параллельных между собой линий, из которых составлена фигура. Мысленно вернемся к рассмотренной в предыдущем разделе криволинейной трапеции. Под термином «линия» Кавальери понимал нашу ординату y_i. Более того, поскольку он считал ее лишенной всякой толщины, в то время как мы представляем ширину полосок как бесконечно малое dx, т. е. линия Кавальери есть не что иное, как наше ydx. Таким образом, выражение Кавальери *omnes lineae* (все линии) представляло по существу то, что мы сегодня называем интегралом, для которого Кавальери пользовался знаком *omn* (сокращение слова *omnes* — все). По поводу этого знака Лейбниц позже писал: «Целесообразно писать знак $\int$ вместо omn и $\int l$ вместо все линии». От знака $\int l$ Лейбниц потом перешел к знаку $\int y$ и, наконец, к символу $\int ydx$.

Резюмируя, можно сказать, что понятие «все линии» Кавальери эквивалентно тому, что в настоящее время мы обозначаем через

$$\int_0^a ydx, \tag{1}$$

где a — длина *инциденты*, т. е. расстояние между двумя крайними прямыми, параллельными регуле.

Кавальери сформулировал следующий принцип определения отношений «сумм всех неделимых»: если две плоские (пространственные) фигуры заключены между одними и теми же двумя параллельными прямыми (плоскостями) и если неделимые обеих фигур, находящиеся на одной параллели, имеют постоянное отношение, то и «суммы всех неделимых» сравниваемых фигур будут иметь то же отношение. Сущность принципа Кавальери состоит в следующем: площади плоских фигур или объемы тел относятся между собой как суммы всех соответствующих неделимых (рис. 26). Результаты Кавальери в переводе на современный язык соответствуют вычислению определенных интегралов типа

$$\int_0^a x^m dx = \frac{a^{m+1}}{m+1} \ (m \text{ — натуральное}). \tag{2}$$

Доказательство он дал лишь для $m = 1, 2, \ldots, 9$.

Это был крупный сдвиг[1] по сравнению с результатами Кеплера. Вообще, в отличие от Кеплера, занимавшегося лишь практическими, конкретными задачами вычисления площадей (так называемыми квадратурами) и вычислением объемов (кубатурами), Кавальери интересовала главным образом общая постановка и систематическая трактовка проблемы в целом независимо от практических применений своих результатов к тем или иным частным квадратурам и кубатурам.

Несмотря на то что труды Кавальери сыграли большую роль в создании исчисления бесконечно малых, в них было много пробелов и недостатков, среди которых следует упомянуть в первую очередь отсутствие алгебраической символики, громоздкость и искусственность приемов, молчаливое требование, чтобы соответствующие неделимые сравниваемых фигур находились на одинаковом расстоянии друг от друга, что на современном языке означает обязательное разделение интервала интегрирования на равные между собой части, рассмотрение лишь суммы значений функции y без учета независимой переменной и ее приращения dx и т. п.

Дело Кавальери продолжали другие видные ученые XVII в.

44. От Кавальери до Ньютона и Лейбница

Среди последователей Кавальери самыми видными учеными, подготавливавшими в XVII в. создание интегрального и дифференциального исчисления, завершенное Ньютоном и Лейбницем, были Дж. Валлис, П. Ферма и Б. Паскаль.

Методы Валлиса, изложенные в его «Арифметике бесконечных» (1655), развивались вслед за методом неделимых Кавальери. Валлис говорит о Кавальери как о своем предшественнике и часто пользуется терминологией метода неделимых. Однако Валлис продвинулся значительно дальше Кавальери. При решении целого ряда геометрических задач Валлис по существу вычислял определенные интегралы от степеней не только с натуральными, но и с целыми отрицательными и дробными показателями, а также от некоторых других алгебраических функций; у Валлиса также впервые встречается в четком виде арифметизированный предельный переход. При этом Валлис исходит уже не из примитивного понятия *всех линий*, а из суммы $\sum_{i=1}^{n} f(x)_i \Delta x_i$. Он рассматривает площадь (определенный интеграл) как общий предел верхних и нижних интегральных сумм при описании и вписании ступенчатых фигур.

Вычислением интегралов от степеней x^r, или, как говорили в то время, квадратурой «парабол» $y = x^r$, где r — рациональное число, П. Ферма занимался еще в 1644 г. Е. Торричелли обобщил

---

[1] Независимо от Кавальери результат (2) нашли Валлис и Декарт.

результат Ферма и на отрицательные показатели. Позже, однако, Ферма независимо от Торричелли изложил общую теорию всех различных случаев. Он впервые разбил фигуру под кривой на малые полоски, которые можно принять за прямоугольники. При этом, однако, он делил отрезок оси Ox, основание криволинейной трапеции, не на части произвольной длины, как это делаем мы, а на отрезки, образующие геометрическую прогрессию. Этот метод деления Ферма назвал *логарифмическим*.

Еще более четко понятие определенного интеграла выступает в трудах Б Паскаля. Он впервые познакомился с неделимыми у Кавальери, о котором отзывался с большой похвалой. Однако, несмотря на то что Паскаль пользовался термином «неделимые», он их понимает не так, как Кавальери. «Сумма ординат» для Паскаля — это уже не все линии, а сумма неограниченного числа прямоугольников, сторонами каждого из которых служили ордината и маленькие равные отрезки абсцисс. Когда речь идет о дуге окружности, вместо суммы ординат он употребляет также выражение «сумма синусов», понимая под синусами значения $f(x_i)$ функции и умножая последние на приращение Δx_i независимой переменной.

Приведем для примера следующую т е о р е м у из «Трактата о синусе четверти круга» (1658) П а с к а л я [1].

Сумма синусов какой-нибудь дуги (BF) четверти круга (рис. 27) равна отрезку основания (AO) между крайними синусами, умноженному на радиус (AB).

Дуга BF делится на равные части, отмеченные точками, из которых проводятся синусы DI. Точки пересечения касательных к дуге окружности в точках D обозначены точками E; из последних опускаются затем перпендикуляры ER.

Предварительно Паскаль доказывает, что

$$DI \cdot EE = RR \cdot AB. \qquad (1)$$

Действительно (рис. 28), из подобных прямоугольников DIA и $EKE(\angle EEK = \angle DAI)$ следует: $\frac{AD}{DI} = \frac{EE}{EK}$. Ввиду того что $AB = AD$, получаем равенство (1). «Я утверждаю, — пишет после этого Паскаль, — что сумма синусов DI, само собой разумеется, каждого умноженного на одну из равных дуг DD, равна прямой AO, умноженной на радиус AB». Заменяя каждую касательную EE дугой DD, Паскаль получает в левой части равенства (1) «сумму синусов», а в правой — произведение AB на сумму отрезков RR, т. е. на AO. Итак, теорема доказана.

Отождествление дуги DD с отрезком касательной Паскаль только подразумевает. Он явно пишет по этому поводу следующее: «Когда я говорю, что все расстояния RR, вместе взятые, равны AO,

---

[1] См.: В и л е й т н е р Г. Как рождалась современная математика. М., Л., 1927, с. 260.

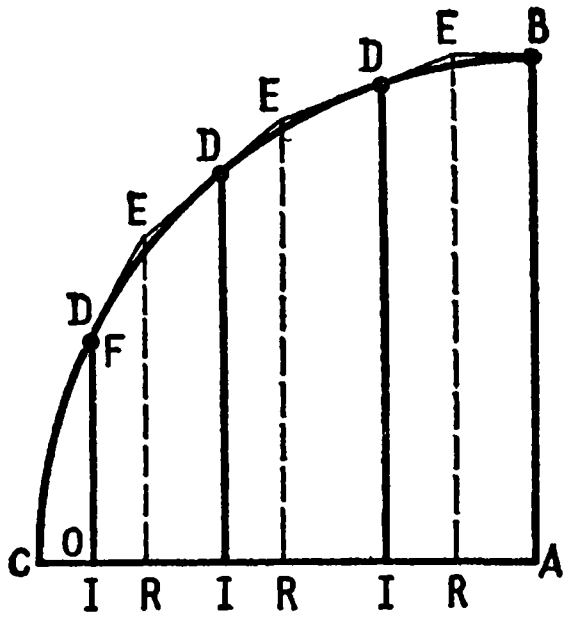


Рис. 27.

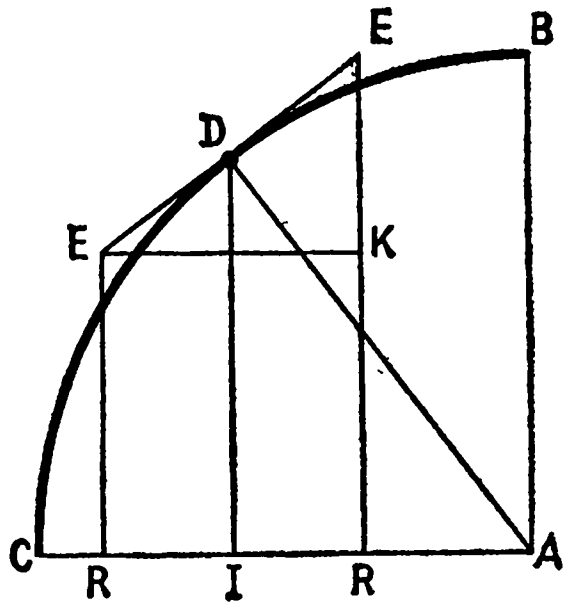


Рис. 28.

а также, что каждая касательная EE равна каждой из малых дуг DD, то не следует этому удивляться, так как достаточно хорошо известно, что хотя на деле этого равенства и не существует, если множество синусов конечно, но тем не менее это равенство существует, если это множество неограниченно. Ибо тогда сумма всех равных между собою касательных EE отличается от всей дуги BF или же от суммы всех равных дуг DD только на величину, меньшую любой заданной величины. То же самое имеет место и для суммы RR всего (отрезка) AO».

Чтобы перевести доказательство Паскаля на современный язык, введем соответствующую систему декартовых координат, обозначим «синус DI» через y, элемент дуги DD — через ds, дифференциал независимого переменного — через ds, дифференциал независимого переменного — через dx, радиус AB — через r. Тогда равенство (1) можно записать так:

$$yds = rdx.$$

Интегрируя согласно содержанию теоремы Паскаля, получим:

$$\int_0^s yds = r \int_0^x dx. \tag{2}$$

Более сложный интеграл, стоящий в левой части этого равенства, сводится таким образом к более простому интегралу правой части, равному rx, а для целой четверти r^2.

Положим $r = 1$ и введем угол $DAB = \angle ADI = \varphi$. Тогда (рис. 28)

$$s = r\varphi = \varphi, \quad y = DI = AD \cdot \cos\varphi = \cos\varphi, \quad x = \sin\varphi.$$

Равенство (2) дает[1]:

---

[1] Переход от (1) к (2) мы называем интегрированием дифференциального уравнения (1). Равенство (3) намекает на то, что $\sin\varphi$ является первообразной функцией для $\cos\varphi$. См. ниже, 45, 46

Б. Паскаль

$$\int_0^{\varphi} \cos\varphi d\varphi = x = \sin\varphi. \qquad (3)$$

Паскаль вычислил и ряд других, более сложных интегралов и интегральных формул для преобразования одних интегралов в другие. Труды Паскаля означали существенный шаг вперед на пути к созданию анализа бесконечно малых. Достаточно упомянуть, что на рассмотренном выше треугольнике EEK (рис. 28) Лейбниц построил свое дифференциальное исчисление. Этот треугольник, названный им *характеристическим*, по собственным словам Лейбница, «осенил его лучом нового света».

Признавая огромные заслуги Паскаля, следует, однако, отметить его «слабость»: он не пользовался новой символической алгеброй и не производил алгебраических выкладок. Подобно древнегреческим математикам, он все выражал словами. Вероятно, это обстоятельство явилось одной из причин, из-за которых Паскаль был лишен возможности создать тот новый общий алгоритм исчисления бесконечно малых, который открыли Ньютон и Лейбниц.

45. «О глубокой геометрии» Лейбница

С основными достижениями математики XVII в. Лейбниц познакомился в начале 70-х годов этого столетия, когда под влиянием голландского ученого Х. Гюйгенса изучил, кроме его работ, «Геометрию» Декарта, труды Кавальери, Валлиса, Паскаля и др. Два года спустя после опубликования мемуара 1684 г. (см. § 2, 14), первого печатного труда Лейбница по дифференциальному исчислению, в «Acta Eruditorum» появился новый его мемуар, названный им «О глубокой геометрии и анализе неделимых, а также бесконечных». Это была первая печатная работа по интегральному исчислению. Основным понятием для Лейбница была сумма актуально бесконечных малых треугольников ydx, на которые разбивается криволинейная фигура, т. е. определенный интеграл. В этом же мемуаре впервые появляется не только знак $\int$, но и запись $\int ydx$, причем Лейбниц предупреждает, что не следует забывать писать под знаком интеграла множитель dx.

В своем мемуаре Лейбниц устанавливает связь между дифференциальным и интегральным исчислением. Еще в 1670 г. английскому математику И. Барроу впервые удалось установить чисто геометрически взаимоотношение между проведением касательных и квадратурой. Лейбниц, исходя из «характеристического» треуголь-

ника (см. 44) с катетами dx и dy (разности абсцисс и ординат двух близких точек линии) и гипотенузой ds (бесконечно малой дуги кривой или бесконечно малого отрезка касательной к дуге), приходит к равенству (дифференциальному уравнению)

$$pdy = xdx, \tag{1}$$

где p — поднормаль (отрезок IA, рис. 28). «Если, — пишет он, — обратить это разностное (дифференциальное) уравнение в суммирующее, то будет

$$\int pdy = \int xdx. \tag{2}$$

Но из того, что я изложил в своем методе касательных, явствует, что

$$\left(\frac{1}{2}\, dx^2\right) = xdx; \tag{3}$$

следовательно, и обратно:

$$\frac{1}{2}\, x^2 = \int xdx, \tag{4}$$

ибо у нас суммы и разности или $\int$ и d взаимно обратны, как в обычном исчислении степени и корня».

Таким образом, исходя из понятия определенного интеграла, Лейбниц приходит к понятию функции $F(x)$ первообразной (или примитивной) для данной функции $f(x)$ так, что

$$F'(x) = f(x), \text{ или } dF(x) = f(x)\, dx. \tag{5}$$

Отсюда и заключение о том, что дифференцирование и интегрирование являются двумя взаимно обратными операциями, вроде сложения и вычитания, умножения и деления, возведения в степень и извлечения корня.

Ниже мы убедимся в том, что независимо от Лейбница и еще до него эти результаты были получены Ньютоном. Последний, однако, нашел их, идя по другому пути.

46. «Метод флюксий» Ньютона. Понятие неопределенного интеграла

К основным понятиям и к алгоритму исчисления бесконечно малых Ньютон пришел в середине 60-х годов XVII в., когда двадцатилетний Лейбниц был студентом юридического факультета и математикой еще не занимался. В своем «Методе флюксий», составление которого Ньютон закончил в 1671 г., автор формулирует две основные проблемы. Первая: «По данному соотношению между флюэнтами определить соотношение между флюксиями». Решение этой проблемы приводит Ньютона к вычислению флюксии (производной) от данной флюэнты (функции) и к своеобразному обоснованию развитого им дифференциального исчисления (рис. 29).

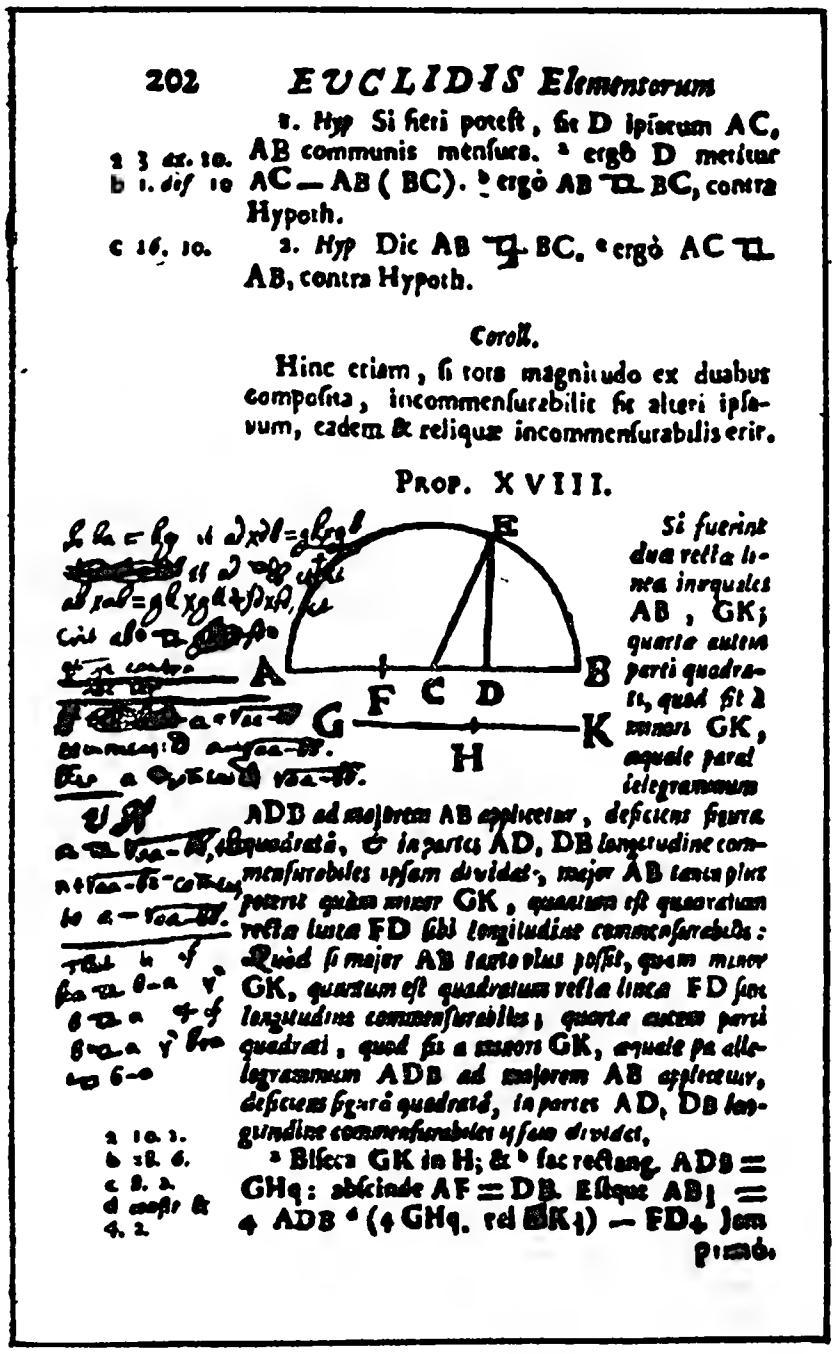
И Ньютон

Он вводит понятие «моментов» текущих величин, соответствующих понятию дифференциалов функций. Неограниченно малую величину, понимаемую как актуально бесконечно малое приращение независимой переменной (времени), Ньютон обозначает через знак o, напоминающий нуль, но не являющийся нулем. Момент флюэнты u, например, он обозначает так: uo, где u — флюксия. Свое исчисление флюксий Ньютон применяет к нахождению максимумов и минимумов величин, проведению касательных и к совершенно новой задаче — определению кривизны данной кривой в данной точке.

Вторую проблему Ньютон формулирует так: «По данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюэнтами». Эта общая проблема об интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений, которую Ньютон решает главным образом с помощью бесконечных рядов, содержит, в частности, задачу определения функции F (называемой *первообразной*), зная ее производную $F' = f$. Именно эта задача приводит к понятию *неопределенного интеграла*.

В современных учебниках дается такое определение: $F(x)$ в данном промежутке называется первообразной функцией для $f(x)$, если во всем этом промежутке $f(x)$ является производной от $F(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x), \text{ или} \qquad (1)$$
$$dF(x) = f(x)\,dx.$$



202 EUCLIDIS Elementorum

1. Hyp Si fieri poteſt, ſit D ipſarum AC, AB communis menſura. a ergò D metitur AC — AB (BC). b ergò AB ⊓ BC, contra Hypoth.

2. Hyp Dic AB ⊓ BC. c ergò AC ⊓ AB, contra Hypoth.

Coroll.

Hinc etiam, ſi tota magnitudo ex duabus compoſita, incommenſurabilis ſit alteri ipſarum, eadem & reliquæ incommenſurabilis erit.

PROP. XVIII.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales AB, GK; quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori GK, æquale parallelogrammum ADB ad majorem AB applicetur, deficiens figura quadratâ, & in partes AD, DB longitudine commenſurabiles ipſam dividat, major AB tanto plus poterit quàm minor GK, quantum eſt quadratum rectæ lineæ FD ſibi longitudine commenſurabilis: Quòd ſi major AB tanto plus poſſit, quam minor GK, quantum eſt quadratum rectæ lineæ FD ſibi longitudine commenſurabilis; quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori GK, æquale parallelogrammum ADB ad majorem AB applicetur, deficiens figurâ quadratâ, in partes AD, DB longitudine commenſurabiles ipſam dividet.

a Biſeca GK in H; & b fac rectang. ADB = GHq: abſcinde AF = DB. Eſtque AB ⅃ = 4 ADB d (4 GHq. vel BK ⅃) — FD ⅃ Jam primò.

Рис. 29. Страница из «Начал» Евклида, принадлежащих Ньютону с его пометками на полях.

Термин «первообразная» (или примитивная) функция ввел в начале XVIII в. Лагранж.

Наряду с $F(x)$ и функции $F(x) + C$ (C — любая постоянная) будут первообразными для $f(x)$ и вообще любая первообразная для $f(x)$ может быть представлена в виде $F(x) + C$. Последнее выражение и называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx. \tag{2}$$

«Неопределенным» интеграл называется потому, что символ (2) неявно включает произвольную постоянную C. Об историческом происхождении символа (2), и в частности о записи ydx, уже говорилось выше.

Многие задачи из механики и физики ведут к понятию первообразной функции и неопределенного интеграла, однако исторически, в частности у Ньютона, это понятие возникло из геометрии как задача *квадратуры кривой.*

Пусть имеем криволинейную трапецию (рис. 30), ограниченную сверху кривой $y = f(x)$, и пусть эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает лишь неотрицательные значения. Для нахождения площади P нашей трапеции рассмотрим сначала площадь $P(x)$ фигуры $ADLK$, отвечающей промежутку $[a, x]$, где x — произвольно взятое на отрезке $[a, b]$ значение. Для нахождения функции $P(x)$ построим приращение Δx и соответствующее ему приращение ΔP. Если m и M представляют минимум, соответственно максимум $f(x)$ в промежутке $[x, x + \Delta x]$, то, очевидно, будет иметь место неравенство

$$m\Delta x < \Delta P < M\Delta x, \tag{3}$$

откуда

$$m < \frac{\Delta P}{\Delta x} < M. \tag{4}$$

Вследствие непрерывности функции m и M будут стремиться к $f(x)$ при стремлении Δx к нулю, и мы получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = P'(x) = f(x), \tag{5}$$

т. е. производная от переменной $P(x)$ по конечной абсциссе x равна конечной ординате $y = f(x)$, или, то же, площадь $P(x)$ криволинейной трапеции есть первообразная функция для функции $y = f(x)$, представляющей собой кривую, ограничивающую трапецию.

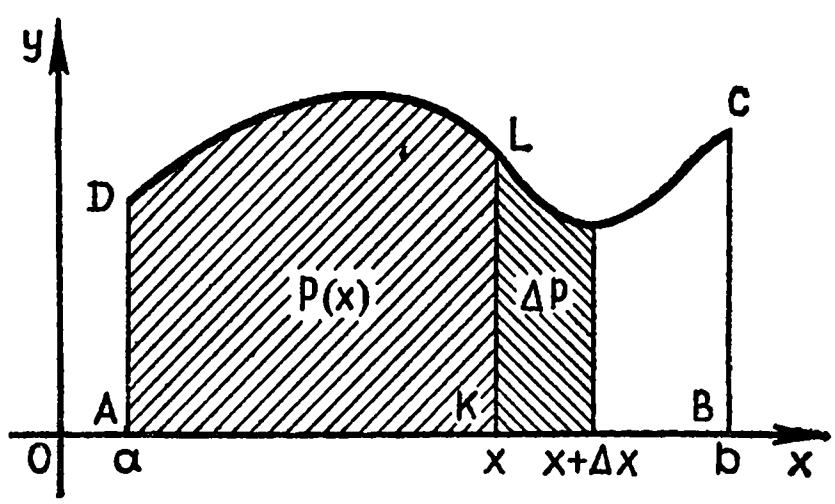


Рис. 30.

Можно теперь записать:

$$P(x) = F(x) + C. \tag{6}$$

Но так как при $x = a P(x) = 0$, получим для значения постоянной C в нашем случае:

$$0 = F(a) + C, \text{ или } C = -F(a),$$

подставив это значение C в (6), будем иметь:

$$P(x) = F(x) - F(a). \tag{7}$$

Для определения площади P всей криволинейной трапеции $ABCD$ следует положить $x = b$. Тогда

$$P = F(b) - F(a). \tag{8}$$

Таким путем, исходя из понятия производной, Ньютон пришел к понятию первообразной или неопределенного интеграла. Последний являлся для Ньютона первоначальным понятием при построении интегрального исчисления, в отличие от Лейбница, исходившего из понятия *определенного интеграла*.

Равенство (7), пользуясь современными символами, можно переписать так:

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a). \tag{9}$$

Это и есть так называемая теперь «Формула Ньютона —Лейбница», содержание которой по существу восходит к И. Барроу. В ней определенный интеграл, рассматриваемый как функция верхнего переменного предела интегрирования, представлен в виде одной из первообразных $F(x) + C$ подынтегральной функции $f(x)$.

Формула (8), которую можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{10}$$

носит название «основной формулы интегрального исчисления». Она позволяет сводить довольно сложное вычисление определенных интегралов, т. е. нахождение пределов интегральных сумм, к сравнительно более простой операции отыскания первообразных.

Правая часть (10) записывается и в виде $[F(x)]_b^a$ или еще проще $F(x)\Big|_a^b$.

Итак, задача вычисления площади фигур, т. е. квадратура, ведет к понятиям как определенного, так и неопределенного интегралов. Вот почему вычисление интегралов стали называть *квадратурой*. Написанная вскоре после «Метода флюксий» и опубликованная в 1704 г. работа Ньютона «Рассуждение о квадратуре кривых» была посвящена в основном интегрированию некоторых сложных выражений.

47. Приближенное вычисление интегралов. Формула Симпсона

В предыдущей беседе показано, что определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ есть заданная на отрезке $[a, b]$ непрерывная функция, вычисляется по формуле (10), т. е. с помощью первообразной $F(x)$ функции $f(x)$. Однако ввиду того, что ученики X класса умеют выражать первообразную через элементарные функции лишь для сравнительно небольшого класса функций, то для практических и других целей часто приходится пользоваться методами приближенного интегрирования, применяя соответствующие приближенные формулы. Одна из них, служащая для вычисления площади (криволинейной трапеции $ABCD$) под кривой $y = f(x)$, носит название *параболической формулы* или *формулы Симпсона* и имеет следующий вид:

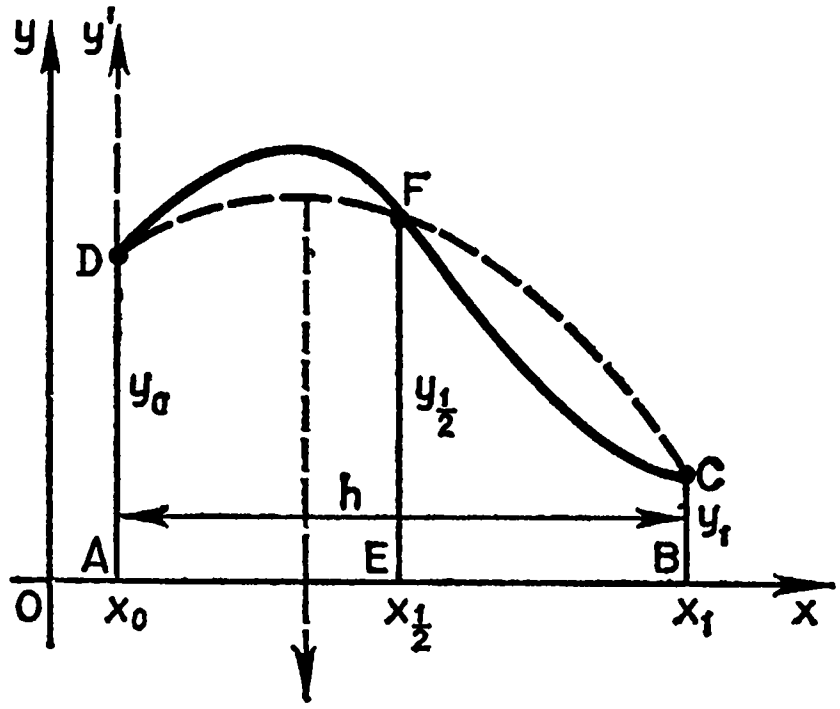


Рис. 31.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{6}\left[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + \cdots + y_{n-1}) + \right.$$

$$\left. + 4\left(y_{1/2} + \cdots + y_{n-1/2}\right)\right], \qquad (1)$$

где $h = AB$ — основание или высота трапеции (рис. 31), n — число равных частей, на которые разделен отрезок AB, $y_0 = AD$, $y_{1/2} = EF$, $(AE = EB)$, $y_1 = BC$. Каждый из n промежутков, на который разделен отрезок AB, в свою очередь делится пополам с помощью точек $x_{1/2}$, $x_{3/2}$, ..., $x_{n-1/2}$.

Формула (1) получается путем замены дуги CD данной кривой $y = f(x)$ дугой параболы (начерченной на рисунке 31 штриховой линией) с вертикальной осью, проходящей через три точки C, F, D данной кривой. Уравнение параболы имеет вид:

$$y = ax^2 + bx + c. \qquad (2)$$

Площадь S под параболой вычисляется точно:

$$S = \int_0^h (ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{h}{6}\,(2ah^2 + 3bh + 6c).$$

Имея в виду, что

$$y_0 = AD = c, \quad y_1 = BC = ah^2 + bh + c, \quad y_{1/2} = \frac{ah^2}{4} + \frac{bh}{2} + c,$$

получим:

$$2ah^2 + 3bh + 6c = y_0 + 4y_{1/2} + y_1.$$

Итак,

$$S = \frac{h}{6}(y_0 + 4y_{1/2} + y_1). \tag{3}$$

Эту точную формулу иногда тоже называют «формулой Симпсона». На основании ее можно получить формулу (Симпсона) для объема тела[1]:

$$V = \frac{H}{6}(S_0 + 4S_{1/2} + S_1), \tag{4}$$

т. е. объем данного тела численно равен площади такой параболической трапеции, крайние ординаты которой y_0 и y_1 численно равны площадям S_0 и S_1 параллельных оснований тела, а ордината $y_{1/2}$ численно равна площади $S_{1/2}$ перпендикулярного высоте сечения, проходящего через ее середину. Формула объема (4) является вообще приближенной; точной она представляется лишь для тех тел, площади сечений которых определяются значениями многочленов степени $k \leqslant 3$ ($S = hx + M$, $S = hx^2 + Mx + N$, $S = hx^3 + Mx^2 + Nx + P$, где x — расстояние сечения от некоторой точки). К таким телам принадлежат, в частности, многогранники и круглые тела, изучаемые в школе (пирамида, конус, шар и др.).

Английский математик и педагог Томас Симпсон (1710—1761), сын ткача, самоучка, не получил специального математического образования. Благодаря своему трудолюбию, таланту и интересу к математике он настойчиво самостоятельно в совершенстве овладел дифференциальным и интегральным исчислением. В 33-летнем возрасте Симпсон стал преподавателем математики. Он написал трактат о флюксиях, книгу по теории вероятностей и целый ряд очень ценных в то время учебников и сборников задач по алгебре, геометрии и тригонометрии. Вышеприведенная формула (1), носящая его имя, была опубликована в его «Математических рассуждениях на физические и аналитические темы» (1743). Фактически эта формула была им лишь вновь открыта. Он не знал, что ее содержание было до него известно Торричелли (1644), Грегори (1668), Ньютону (1676) и Котесу (1722).

---

[1] См. статьи И. А. Марнянского «Элементарное доказательство правила Симпсона», И. С. Климова «Вычисление объемов с помощью формулы Симпсона», В. М. Клопского «Изучение объемов с помощью формулы Симпсона» в МШ, 1963, № 2.

48. Г. Ф. Лопиталь и его «Анализ бесконечно малых»

Известно, что предыстория интегрального исчисления восходит к глубокой древности, к временам Евдокса, Евклида и Архимеда (IV и III вв. до н. э.). В XVII в до Ньютона и Лейбница в анализе тоже больше всего было сделано в области интегрального исчисления. Неделимые Кеплера и Кавальери, задачи на квадратуры и кубатуры подготовили почву для возникновения понятия определенного интеграла. Ферма, Паскаль, Валлис и Барроу фактически вычислили ряд простейших интегралов. Значительно меньше было сделано до Ньютона и Лейбница в области дифференциального исчисления.

Фактически первые работы Ньютона по математическому анализу относятся к 1665 г., т. е были выполнены значительно раньше работ Лейбница, начало которых относится к середине 70-х годов XVII в. Однако официальным годом рождения дифференциального исчисления был 1684 г. В мае этого года была опубликована первая печатная работа, в которой излагаются основные понятия и методы дифференциального исчисления. Это была знаменитая статья Лейбница «Nova methodus pro maximis et minimis...», опубликованная в лейпцигском журнале «Acta Eruditorum» от 1684 г.

В этой статье, очень сжатой и малодоступной, Лейбниц называет свой «новый метод» *дифференциальным исчислением* и вводит специальный знак d для выражения дифференциалов, т. е. приращения величин. Без доказательств Лейбниц сообщает правила дифференцирования константы, суммы, разности, произведения, частного, степени и корня. Он дает указания, как применять дифференциалы для исследования максимумов и минимумов и точек перегиба кривых.

В 1685 г. шотландский ученый Джон Крег опубликовал работу «Метод определения... квадратур фигур», воспроизводившую метод Лейбница для проведения касательных. В 1686 г. появилась первая печатная работа по интегральному исчислению — статья Лейбница «О глубокой геометрии и анализе неделимых, а также бесконечных». В ней впервые появляется знак интеграла.

В 1689—1695 гг. появляются и другие статьи Лейбница в области анализа. С 1690 г. ближайшие сотрудники Лейбница, братья Якоб и Иоганн Бернулли, начинают опубликовывать некоторые свои работы в области анализа. Однако все упомянутые статьи были опубликованы в малораспространенных журналах. Если добавить, что статьи эти писались очень сжато, тяжеловесным и трудным для понимания стилем, то станет ясным, почему они были доступны лишь узкому кругу специалистов. А между тем с каждым годом все больше назревала потребность в широком применении новых результатов, в ознакомлении многочисленных математиков и ученых с элементами анализа; требовалось создание общедоступного курса, систематически излагающего основы нового исчисления.

Такой первый в мире печатный курс дифференциального исчисления опубликовал в 1696 г. Лопиталь.

Маркиз Гильом Франсуа Лопиталь родился в 1661 г. и уже в молодости занялся серьезными математическими исследованиями. Благодаря своему таланту и трудолюбию Лопиталь стал известен как один из виднейших математиков Франции того времени.

Прочитав «Новый метод» Лейбница, Лопиталь сразу же стал одним из его приверженцев и составлял собственные записи по разным вопросам, связанным с дифференциальчым исчислением. В 1692 г. в Париж приехал один из ближайших сотрудников Лейбница — Иоганн Бернулли. Лопиталь его пригласил в свое имение. Здесь в Турени они провели четыре месяца и совместно занимались математикой. В том же году началась переписка Лопиталя с Лейбницем, а в конце 1692 г. в «Acta Eruditorum» появилась статья Лопиталя и И. Бернулли. В последующие годы Лопиталь наряду с Лейбницем, Гюйгенсом и братьями Бернулли решает ряд актуальных в то время экстремальных задач.

Наибольшую славу принесло Лопиталю решение знаменитой задачи о брахистохроне (от греческих слов «брахистос» — кратчайший и «хронос» — время), поставленной Иоганном Бернулли. Задача состояла в следующем: найти кривую, по которой тяжелое тело, двигаясь под влиянием силы тяжести и с начальной скоростью, равной нулю, спускается от одной ее точки M к другой N в кратчайшее время (рис. 32). В частном случае когда точки M, N лежат на одной вертикальной прямой, то эта прямая и является решением задачи.

Это одна из самых любопытных задач в истории математики. Долгое время считали, что следует двигаться по прямой M, N, представляющей кратчайшее расстояние между точками M и N, однако после открытия Галилеем законов падения тел и их движения по наклонной плоскости под действием одной только силы тяжести стало ясным, что линия кратчайшего расстояния не является и линией наименьшего времени и что решение проблемы представляет не прямая, а кривая, являющаяся при отсутствии сопротивления среды *циклоидой*[1]. В конце XVII в. эту задачу решили четыре ученых: Лопиталь, Лейбниц, Ньютон и Якоб Бернулли. Задача о брахистохроне и основные идеи ее решения привели к созданию в XVIII в. *вариационного исчисления* и к дальнейшему развитию анализа.

В 1696 г. Лопиталь без указания своей фамилии опубликовал «Анализ бесконечно малых для понимания кривых линий». Интересно отметить, что он предварительно просил у Лейбница согласия на выпуск этой книги. Лейбниц горячо одобрил инициативу Лопиталя.

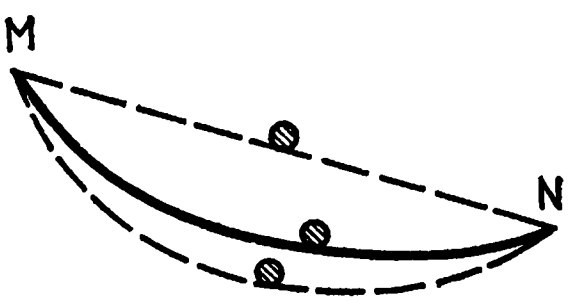


Рис. 32.

[1] См. § 25, задача 5

Первый печатный курс дифференциального исчисления «Анализ бесконечно малых» Лопиталя состоит из предисловия и 10 глав. В предисловии дается краткий исторический обзор развития нового исчисления. Из предисловия мы узнаем также, почему книга издана анонимно. Оказывается, Лопиталь это сделал из-за скромности. Он пишет: «Я многим обязан знаниями гг. Бернулли, особенно младшему из них. Я без всякого стеснения пользовался их открытиями и открытиями г. Лейбница. Поэтому я не возражаю против того, чтобы они предъявили свои авторские права на все, что им угодно, сам довольствуясь тем, что они соблаговолят мне оставить...»

В 10 главах книги излагаются определения постоянных и переменных величин и дифференциала («Бесконечно малая часть, на которую непрерывно увеличивается или уменьшается переменная величина, называется ее дифференциалом»), объясняются употребляющиеся обозначения dx, dy и др., выводятся правила дифференцирования алгебраических выражений, определяются дифференциалы высших порядков, применяется дифференциальное исчисление к нахождению касательных к кривым, к нахождению максимумов и минимумов, точек перегиба и возврата, изучаются эволюта и эвольвента, исследуются вопросы кривизны и т. п. В 9-й главе излагается знаменитое «правило Лопиталя» для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$. После геометрического доказательства этого правила Лопиталь приводит примеры его применения.

Большими достоинствами книги Лопиталя являются простота и строгая последовательность изложения, четкость стиля, обилие примеров легких, средних и более трудных. Благодаря этим качествам и новизне предмета, впервые по настоящему понятого широкими слоями математиков, книга Лопиталя произвела огромное впечатление на его современников. Недаром секретарь Парижской Академии наук Фонтенель так выразился: «До Лопиталя новая геометрия была своего рода тайной, мистической наукой, известной 5—6 лицам...» «Анализ бесконечно малых» Лопиталя начинающие математики быстро раскупили. Книга выдержала ряд изданий: в 1696, 1715, 1730, 1768 гг. В 1730 г. она была переведена на английский язык. Несколько месяцев спустя после смерти Лопиталя Иоганн Бернулли выступил в печати с заявлением, в котором он требовал авторские права на методы, содержащиеся в книге Лопиталя. В частности, он писал, что еще в 1694 г. он сообщил Лопиталю способ раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$. В 1721 г. и особенно в 1742 г. И. Бернулли снова выступил с заявлением о том, что основное содержание книги Лопиталя взято автором из лекций его, Иоганна Бернулли. Именно в 1742 г. И. Бернулли впервые публикует свое интегральное исчисление, в предисловии к которому он пишет: «Имею в виду мои лекции по дифференциальному исчислению, содержание которых было включено знаменитым

Лопиталем в пользующуюся всеобщим распространением книгу «Анализ бесконечно малых»...

Уже в конце XVIII — начале XIX в. историки математики поразному относились к претензиям И. Бернулли. Большая часть их защищала Лопиталя. В конце XIX — начале XX в. М. Кантор и Г. Цейтен также отстаивали почти полную самостоятельность книги Лопиталя, основываясь главным образом на том, что рукописи Бернулли фактически не было.

Но в 20-х годах нашего века в Базельской университетской библиотеке был случайно найден рукописный курс Иоганна Бернулли «Lectiones de calculo differentialium» («Лекции по дифференциальному исчислению»). Хотя эта рукопись не датирована, видно все же, что ее содержание относится ко времени, предшествующему 1694 г. Так, например: 1) в ней еще имеется устарелое обозначение: $4C\sqrt{yx+xx}$, в то время как в своих других рукописях 1692 г. Бернулли уже писал не C (cubus), а $4\sqrt{(yx+x^2)^3}$; 2) в ней еще утверждается, что интеграл от $\frac{dx}{x}$ бесконечен, между тем в одной из рукописей Бернулли 1693 г. явно исправлена эта ошибка и показывается, что он равен $\log x$. На основе найденной рукописи следует заключить, что в основном содержание книги Лопиталя действительно заимствовано у Иоганна Бернулли. В частности, известное «правило Лопиталя» следовало бы назвать «правилом Иоганна Бернулли». В отношении содержания самостоятельными в книге Лопиталя являются лишь ряд примеров и некоторая часть книги, относящаяся к исследованию особых точек кривых. С точки зрения упорядочения и расположения материала, ясности и систематичности изложения книга Лопиталя вполне оригинальна и стоит гораздо выше курса И. Бернулли.

С современной точки зрения в книге Лопиталя были, конечно, значительные недостатки и ошибки. Во-первых, все свои доказательства автор основывает на двух постулатах: 1) $x + dx$, где dx — бесконечно малая по сравнению с x, можно принимать за x; 2) кривую можно отождествлять с вписанным в нее многоугольником с бесконечным числом бесконечно малых сторон. Эти постулаты характерны для лейбницева анализа, являвшегося исчислением именно бесконечно малых дифференциалов. В XVII в., да и в течение XVIII в. было распространено понятие «актуально» бесконечно малой, носившее мистический характер и приводившее к парадоксам. Правильное и ясное понимание бесконечно малого стало возможным лишь после разработки теории пределов в XIX в. Во-вторых, у Лопиталя отсутствуют дифференциалы трансцендентных функций, отсутствуют разложения в ряды, очень примитивно исследование особых точек. Эти обстоятельства при дальнейшем быстром развитии анализа были причиной того, что книга Лопиталя по своему содержанию вскоре оказалась устаревшей. Только ее педагогические достоинства способствовали тому, что в 1768 г.

вышло еще одно, последнее, четвертое издание, несмотря на то что научный уровень книги уже не соответствовал той высокой степени развития, которой достигла математика в конце 70-х годов XVIII в., когда уже появились труды корифеев анализа: Даламбера, Эйлера, Лагранжа. В настоящее время книга Лопиталя имеет лишь историческое значение. Как первая в мире книга по дифференциальному исчислению, она причисляется к математической классике. Что же касается самого Лопиталя, то основная его заслуга заключается не в скромном его вкладе в саму науку, а в том, что он был одним из первых ученых, которые оценивали могущество и красоту новых математических методов. Он первый энергично взялся за систематическое и доступное изложение основ дифференциального исчисления, он был одним из первых глашатаев и пропагандистов новых идей и замечательных методов математического анализа, с которым неразрывно связан весь прогресс естествознания и техники.

49. Дифференциальное и интегральное исчисление в трудах Эйлера и других ученых XVIII—XIX вв.

В XVIII в. наибольший вклад в развитие и популяризацию дифференциального и интегрального исчисления внес Леонард Эйлер. До него, кроме «Анализа бесконечно малых» Лопиталя (1696), содержащего лишь начальные сведения по дифференциальному исчислению, и курса лекций по интегральному исчислению И. Бернулли (1742), составленных, как и книга Лопиталя в 90-х годах XVII в., не было никаких учебников или общих руководств по этой новой отрасли науки. Указанные две книги значительно устарели и в первой половине XVIII в. отстали от развития анализа. Остро чувствовалась потребность в новом систематическом курсе. Это обстоятельство и побудило Эйлера составить полный курс математического анализа. Этот курс состоит из следующих книг:

1) «Введение в анализ бесконечных», 2 тома, 1748,
2) «Дифференциальное исчисление», 1 том, 1755 и
3) «Интегральное исчисление», 3 тома, 1768—1769[1].

Эти книги содержат как результаты работ предшественников и современников Эйлера, так и многие его собственные исследования в области анализа. «Весь анализ бесконечных, — пишет Эйлер, — вращается вокруг переменных величин и их функций»[2]. О том, что понимал Эйлер под функцией, уже говорилось выше (§ 1, 5). Отметим, что в отличие от своих предшественников, обосновывавших и определявших основные понятия из курса анализа с помощью геометрических и механических представлений, Эйлер задался

---

[1] Все эти книги переведены на русский язык. Дополнительный, четвертый том интегрального исчисления вышел уже после смерти Эйлера, в 1794 г.

[2] См.: Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. М., 1961, т. I, с. 19.

целью осуществить абстрактное изложение анализа. В его курсе, как он сам пишет, «все изложение ограничено пределами чистого анализа, так что для изложения всех правил не понадобилось ни одного чертежа. Академик Н. Н. Лузин назвал Эйлера „первым аналистом в мире“».

Эйлер в «Дифференциальном исчислении» уделяет главное внимание понятию производной, из которого впоследствии исходили Коши и другие математики первой половины XIX в. Эйлер не одобрял логически невыдержанное отбрасывание точно неопределяемых высших бесконечно малых слагаемых, введенное в школе Лейбница (16—17), и, утверждая, что бесконечно малая величина есть нуль, он строил своеобразное «исчисление нулей»; в последнем разность двух бесконечно малых всегда равна нулю, отношение же их $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ может иметь любые значения, одно из которых при стремлении Δx к нулю ведет к производной. Однако в целом эйлерово учение о бесконечно малых в смысле логической безупречности не ушло далеко от учения Лейбница. Достоинством эйлерова анализа является строгая система изложения, введение в него новых формул, примеров и другого конкретного материала. В частности, он открыл правила раскрытия некоторых неопределенностей, в том числе $\frac{\infty}{\infty}$ и $\infty - \infty$. Большая часть тома «Дифференциальное исчисление» посвящена теории рядов и дифференциальным уравнениям, учение о котором Эйлер значительно развил. В этом произведении он ввел ныне всеми употребляемые математические обозначения e, i, Δx, Σ, sin, cos, tg и др.

Книга «Интегральное исчисление» Эйлера содержит, кроме разных методов вычисления интегралов функций, учение об интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений, в котором изложен ряд его собственных результатов, ставших классическими уже во второй половине XIX в., созданную им теорию уравнений с частными производными, вопросы вариационного исчисления, одним из творцов которого он был, и другие важные темы и разделы анализа. Метод изложения Эйлера весьма близок к современному. Например, элементарные вопросы интегрирования функций в наших учебных руководствах излагаются почти так же, как они изложены у Эйлера, если не считать употребления им слова «количество» вместо слова «величина».

Приведем следующую выдержку на первой странице книги Эйлера «Интегральное исчисление» (т. I):

Определение

Интегральное исчисление есть метод, посредством которого по данному соотношению между дифференциалами, количеств находят соотношение между своими количествами, а действие, с помощью которого это достигается, называется интегрированием.

Следствие 1

Значит, в то время как дифференциальное исчисление учит находить соотношение между дифференциалами по данному соотношению между переменными количествами, интегральное исчисление дает метод решения обратной задачи.

Следствие 2

В анализе постоянно попарно противопоставляются друг другу два действия, как например вычитание противопоставляется сложению, деление — умножению, извлечение корня — возведению в степень. Подобным же образом интегральное исчисление противопоставляется дифференциальному исчислению.

Следствие 3

Если предложено некоторое соотношение между двумя переменными количествами x и y, то дифференциальное исчисление дает метод разыскания отношения дифференциалов $dy : dx$; если же, наоборот, по этому отношению дифференциалов требуется определить соотношение самих количеств x и y, то эта задача относится к интегральному исчислению.

Далее следует простейший пример.

Так как дифференциалы следующих функций от x

$$x^2,\ x^n,\ \sqrt{a^2 - x^2}$$

суть $2xdx,\ nx^{n-1}dx,\ -\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$,

то, пользуясь знаком интегрирования $\int$, мы, очевидно, получим:

$$\int 2xdx = x^2,\quad \int nx^{n-1}dx = x^n,\quad \int -\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{a^2 - x^2}\ .$$

Отсюда яснее видно, как применяется этот знак.

Итак, в отличие от Лейбница у Эйлера, как и у Ньютона, исходным является понятие первообразной, т. е. неопределенного интеграла. Исходить из интегральной суммы по образцу Лейбница Эйлер не мог уже потому, что его бесконечно малые по определению были нулями. Определенный интеграл был для Эйлера частным случаем неопределенного, одной из первообразных. Поэтому Эйлер вообще не писал пределов интегрирования, а выражал этот факт словесно. Вместо ныне принятого $\int_a^b Pdx$ Эйлер в последние годы жизни писал:

$$\int Pdx \left[\begin{matrix} ab & x = a \\ ad & x = b \end{matrix}\right],$$

где латинские слова *ab* и *ad* означают *от* и *до*.

В «Интегральном исчислении» Эйлер излагает многочисленные различные приемы вычисления не только неопределенных интегралов, но и определенных, применяя и развивая новые методы, как например интегрирование по параметру, использование разных подстановок и др. Он вычислил много труднейших определенных интегралов[1] и открыл ряд новых важнейших интегралов[2]. Он разработал и метод для приближенного вычисления определенных интегралов.

На трудах Эйлера воспитывалось по крайней мере целое поколение математиков второй половины XVIII в. и первой четверти XIX в. Об этом свидетельствуют известные слова одного из крупнейших ученых того времени, автора пятитомного «Трактата о небесной механике» П. С. Лапласа (1749—1827):

«Читайте, читайте *Эйлера*: *это наш общий учитель*...».

Академик Михаил Васильевич Остроградский около середины XIX в. писал: «Эйлер создал современный анализ, обогатил его один сам более, чем все его предшественники вместе, и сделал из него самый могущественный инструмент ума человеческого. Он один охватил анализ во всем его объеме и указал на многочисленные и разнообразные его применения... Эйлер обязан этой славе благодаря тому перевороту, который он произвел в математических науках, подвергнув их все анализу, благодаря своей работоспособности, позволившей ему объять все эти науки во всем их объеме, благодаря методическому порядку, внесенному им в свои многочисленные труды, благодаря простоте и доступности своих формул, ясности своих методов и своих доказательств»[3].

Наряду с Эйлером выдающихся результатов в области математического анализа добился другой крупнейший математик XVIII в. — Ж. Л. Лагранж. Он в 18-летнем возрасте уже занял должность профессора в артиллерийской школе родного города (г. Турин, Италия), а через пять лет был избран членом Берлинской Академии наук, президентом которой он был в 1766—1787 гг. С 1772 г. он состоял и членом Парижской Академии наук. В Париже Лагранж жил с 1787 г. до последних дней своей жизни (1813).

---

[1] Например, $\int_0^1 \frac{(x-1)\,dx}{\ln x} = \ln 2.$

[2] Например, бета-функцию

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}$$

и гамма-функцию $\int_0^1 (-\ln x)^n\,dx = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx.$

[3] См.: Гнеденко Б. В., Остроградский М. В. М., 1952, с. 101—102.

Лагранжу принадлежат оценка остаточного члена ряда Тейлора, формула конечных приращений, теория условных экстремумов. Основываясь на результатах Эйлера, он впервые систематически изложил основные понятия вариационного исчисления, ставшего благодаря ему самостоятельной ветвью математического анализа. В своей «Теории аналитических функций» (1797) Лагранж сделал попытку обосновать дифференциальное исчисление чисто алгебраически, освободив его от туманных в то время понятий бесконечно малой и предела. Однако новое исчисление Лагранжа оказалось сложнее обычного дифференциального исчисления. Важнейшим, ставшим классическим трудом Лагранжа является его «Аналитическая механика» (1788), построенная методами математического анализа, изложенная как дедуктивная наука. (На I форзаце: группа французских ученых XVIII в., среди которых Монж, Лаплас и Лагранж.)

Многие из результатов, полученных в области математического анализа в XIX в., берут свое начало в трудах Эйлера[1]. Однако, как мы уже знаем[2], с 20-х годов прошлого столетия О. Коши (наряду с Гауссом, Абелем и Больцано) выступил как новатор в анализе и, пересмотрев основы дифференциального и интегрального исчисления, построил свой курс анализа на более стройных логических началах. Работы Коши основаны на систематическом использовании понятия предела, в них впервые были изложены современные определения понятий предела, производной, непрерывной функции и их основные свойства.

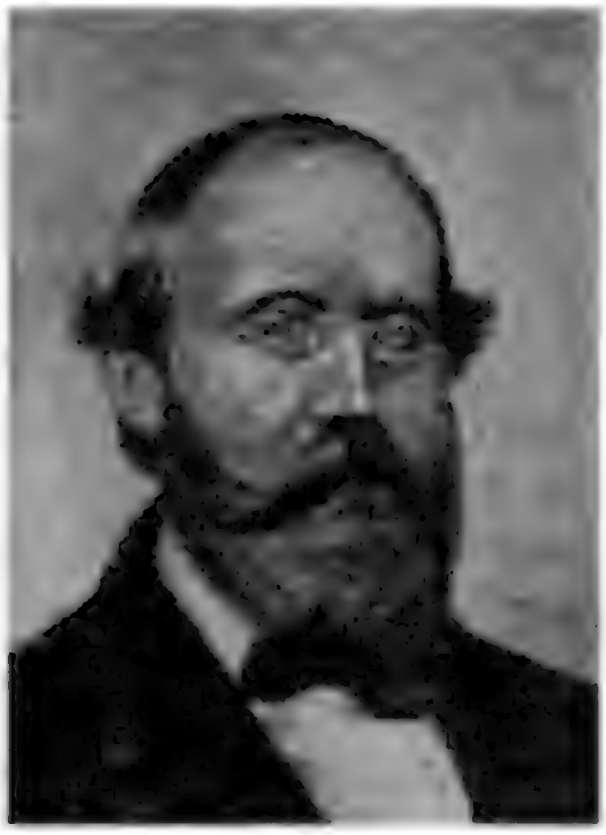
Ряд важнейших результатов из области обоснований анализа был получен Б. Больцано еще до Коши, например: строгое определение непрерывности функций, критерий сходимости последовательностей. Другие открытия им были сделаны даже раньше Вейерштрасса, например: долгое время считали, что Вейерштрасс впервые в 1875 г. открыл, что не всякая непрерывная функция имеет производную, т. е. что не всякая непрерывная кривая имеет всюду касательную. На самом же деле Больцано еще в 20-х годах XIX в. построил непрерывную функцию, не имеющую конечной производной. Определенный интеграл, рассматриваемый как предел интегральной суммы, О. Коши выдвинул как одно из важнейших понятий анализа; он пользовался символом $\int_a^b f(x)dx$, предложенным Фурье. Именно благодаря Коши этот символ вошел в общее употребление и сохранился поныне.

Теория интеграла была затем развита Б. Риманом, который первый определил необходимые и достаточные условия интегрируе-

---

[1] Сюда относятся, в частности, учение о многократных интегралах, развитое Лагранжем, Гауссом и Остроградским, теория эллиптических интегралов, усовершенствованная Лежандром, Абелем и Якоби, теория рядов и др.

[2] См. § 1; 9.



Б. Риман

мости ограниченной функции. Ему принадлежит общее определение интеграла («определенного»), поэтому интегральную сумму и стали называть «римановой», хотя по существу это понятие восходит еще к Архимеду, а в современной форме для случая непрерывной функции им пользовался Коши.

Большой вклад в развитие математического анализа в XIX в. внесли М. В. Остроградский и П. Л. Чебышев.

Михаилу Васильевичу Остроградскому принадлежат важнейшие результаты в области интегрального исчисления: формула, сводящая вычисление тройного (и, вообще, n-кратного) интеграла к вычислению двойного [$(n-1)$-кратного] интеграла, общий прием интеграции рациональных функций, формула преобразования переменных в многомерных интегралах и др. Пафнутий Львович Чебышев посвятил шесть больших мемуаров интегрированию алгебраических функций. Среди его классических результатов имеется знаменитая теорема об интегрировании биномиальных дифференциалов, содержащаяся в мемуаре, опубликованном в 1853 г. и озаглавленном «Об интегрировании иррациональных дифференциалов». В анализе большую роль играют «полиномы Чебышева». Современная, так называемая «конструктивная теория функций» выросла из учения Чебышева о наилучшем приближении функций определенного типа, например многочленов степени n. Работы Чебышева в области анализа и его приложений были успешно продолжены его учениками, в том числе А. М. Ляпуновым, В. А. Стекловым, С. Н. Бернштейном и др.

Глубокие исследования, предпринятые в области анализа в конце XIX и начале XX в., связаны с развитием теории функций, теории множеств и других отраслей современной математики.

50. Некоторые задачи, приводящие к понятию об обыкновенном дифференциальном уравнении

С проникновением в математику идеи движения и переменных величин, с развитием понятий производной и первообразной данной функции появился и новый вид уравнений, решение которых дает возможность находить не просто значения тех или других постоянных величин, а разные виды функциональных зависимостей, законы тех или иных видов движений и других явлений. Со времен создания учения о дифференциальных уравнениях и поныне этот раздел математического анализа служит человеку мощным средством познания объективного мира.

С понятием дифференциального уравнения мы уже встречались (44—49) при решении задачи, обратной интегрированию. Пусть требуется определить функцию $y = F(x)$, первообразную для данной функции $f(x)$. Итак, исходим из уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{1}$$

или

$$dy = f(x)\,dx. \tag{2}$$

Эти равносильные между собой уравнения, в которые входит *первая* производная (или дифференциал) искомой функции, представляют собой *дифференциальные уравнения первого порядка*. Решить, иными словами, *интегрировать* такие уравнения — значит найти первообразную. *Общее решение*, как мы уже знаем, представится так:

$$y = \int f(x)\,dx + C, \tag{3}$$

где C — произвольная константа. Дифференциальное уравнение (2) или (1) имеет, таким образом, бесконечное множество решений в зависимости от значений, придаваемых C. Каждое отдельное решение, получаемое из общего при каком-либо определенном значении константы C, называют *частным решением*.

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка таков:

$$\Phi(x,\ y,\ y') = 0. \tag{4}$$

Это соотношение связывает искомую функцию y, независимую переменную x и первую производную y' от искомой функции. Заданная в (4) непрерывная функция трех аргументов Φ может не содержать x и y, но всегда содержит y'. Уравнение (1) есть частный случай дифференциального уравнения (4), где y' или $\frac{dy}{dx}$ явно определена как функция от x.

Аналогично

$$\Phi(x,\ y,\ y',\ y'') = 0 \tag{5}$$

представляет собой общий вид дифференциального уравнения *второго порядка*, а

$$\Phi(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^n) = 0 \tag{6}$$

есть дифференциальное уравнение n-го порядка. Дифференциальные уравнения (4), (5), (6), в которых речь идет об одном независимом переменном x, называются *обыкновенными*.

С задачами, приводящими к дифференциальным уравнениям, математики встретились частично еще в XVI в., но в основном на-

чиная с XVII в. Такие задачи возникали в связи с запросами развивающейся вычислительной математики, но главным образом при решении проблем механики, физики и геометрии. Значительная часть применения математики к естествознанию основана на решении дифференциальных уравнений. Известен, например, закон свободного падения тел, открытый еще Галилеем. В современной трактовке проблему эту можно изложить так.

Пусть под действием земного притяжения материальная точка P падает по вертикальной прямой, которую мы примем за ось Oy системы координат с началом O на поверхности Земли. Для нахождения закона движения точки P мы должны выразить ее ординату y как функцию от времени t. Зная, что ускорение вообще равно $\frac{d^2y}{dx^2}$ и что в данном случае ускорение силы тяжести $g \approx 981$ см/с^2 и направлено вниз, получаем:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g. \tag{7}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Его легко решить, т. е. интегрировать, а именно:

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1, \tag{8}$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2. \tag{9}$$

В *общем решении* (9) дифференциального уравнения (7) содержатся две произвольные константы: C_1 и C_2. Полагая в (8) и (9) $t = 0$, получим:

$$C_1 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = v_0,$$

$$C_2 = (y)_{t=0} = y_0.$$

Итак, C_1 есть начальная скорость точки P, а C_2 — начальное ее положение. Общее решение (9) дифференциального уравнения (7) можно теперь так представить:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0, \tag{9'}$$

где y_0 и v_0 являются начальными условиями, позволяющими найти частное решение (7).

Поставленная Ньютоном в «Методе флюксий» вторая основная задача (46) — «по данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюэнтами», — собственно, и есть общая задача интегрирования обыкновенных дифференциальных

уравнений. Правда, Ньютон решает ее обычно с помощью степенных рядов, хотя она могла бы быть решена в квадратурах[1].

В знаменитых «Математических началах натуральной философии» Ньютон проинтегрировал целый ряд дифференциальных уравнений, однако в его «Началах» еще не было соответствующих аналитических записей, все изложение носило в основном элементарно-геометрический и частично словесный характер.

В заключение приведем пример решения задачи из современной физики, приводящий к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка.

Скорость радиоактивного распада вещества прямо пропорциональна массе m и выражается формулой

$$\frac{dm}{dt} = -km, \tag{10}$$

где k, коэффициент пропорциональности, определяют опытным путем для каждого вида радиоактивного вещества, а знак «минус» означает, что скорость распада отрицательна, так как масса вещества убывает. Дифференциальное уравнение (10) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{dm}{m} = -kdt. \tag{10'}$$

Интегрирование

$$\int \frac{dm}{m} = -k \int dt \tag{11}$$

дает:

$$\ln m = -kt + \ln C. \tag{12}$$

Потенцируя (12), получим общее решение дифференциального уравнения (10):

$$m = Ce^{-kt}. \tag{13}$$

Это и есть закон убывания массы радиоактивного вещества с течением времени. Определим физический смысл константы C. Полагая в (13) $t = 0$, получим: $C = m_0$, т. е. m_0 представляет массу в начальный момент времени, короче, «первоначальную массу». Закон радиоактивного распада выражается, таким образом, формулой

$$m = m_0 e^{-kt}. \tag{13'}$$

---

[1] Под «квадратурой» в теории дифференциальных уравнений понимают операцию взятия неопределенного интеграла. В иных случаях квадратурой называют: 1) построение квадрата, равновеликого данной фигуре; 2) величину площади, выраженной в квадратных единицах.

Многие другие законы природы выражаются дифференциальными уравнениями, интегрирование которых дает нам возможность познать ход явлений и их развитие с течением времени.

51. Геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными в школе Лейбница

Задачи, в которых требуется найти кривые по заданному свойству касательных к ним, названные в XVII в. «обратные задачи на касательные», встречались еще до Ньютона и Лейбница. Они упоминали о таких задачах в переписке, которую вели между собой в 70-х годах XVII в. В одном из своих писем в 1676 г. Лейбниц употребил термин «дифференциальное уравнение». На современном языке геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка выясняется следующим образом.

Пусть дано уравнение

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

и пусть

$$y = \varphi(x) \tag{2}$$

есть его решение.

Последнее уравнение изображает какую-то кривую, которую принято называть *интегральной кривой* уравнения (1). Каждой точке (x, y) плоскости, в которой определена функция $f(x, y)$, дифференциальное уравнение (1) ставит в соответствие направление касательной к кривой (2). Совокупность всех направлений, определяемую уравнением (1), называют *полем направлений*. С этой точки зрения решение дифференциального уравнения состоит в нахождении кривой по заданному ее направлению в каждой точке. Таких кривых не одна, а так называемое «семейство»:

$$y = \varphi(x, C), \tag{2'}$$

зависящее от одного параметра C. Чтобы выделить одно (частное решение) из интегральных кривых семейства (общего решения) (2′), необходимо задать соответствующие начальные условия: потребовать, например, чтобы кривая проходила через определенную точку (x_0, y_0).

Лейбницу и его сотрудникам, братьям Якову и Иоганну Бернулли, принадлежат первые систематические попытки классификации дифференциальных уравнений и решения определенных их типов с помощью квадратур. К простейшим видам уравнений, интегрируемых в квадратурах, принадлежат в первую очередь так называемые *уравнения с разделяющимися переменными*, т. е. уравнения вида:

$$M dx + N dy = 0, \tag{3}$$

где каждая из функций M, N зависит только от x или только от y. Переменные могут быть в таком случае разделены, а уравнение (3) написано в виде

$$f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy,$$

и решение сводится к квадратурам.

Над приведением дифференциальных уравнений к уравнениям с разделяющимися переменными работали Лейбниц и его сотрудники. В последнее десятилетие XVII в. Лейбниц добился своей цели сперва в отношении однородных уравнений, а затем и линейных. Остановимся на первых.

Как известно, функция $f(x,y)$ называется однородной функцией измерения n, если при любом t имеем:

$$f(tx,\ ty) = t^n f(x,\ y).$$

В частности, многочлен, все члены которого имеют степень n, есть однородная функция измерения n. Дифференциальное уравнение

$$Mdx + Ndy = 0$$

называется однородным, если M и N являются однородными функциями одинакового измерения[1]. Для того чтобы решить это уравнение, Лейбниц воспользовался подстановкой $y = ux$ и свел его таким образом к новому уравнению с разделяющимися переменными.

Пример.

Пусть дано однородное дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{x+y}{x+2y} = 0. \tag{4}$$

Применяем подстановку $y = ux$:

$$u + x\frac{du}{dx} + \frac{1+u}{1+2u} = 0,$$

$$x\frac{du}{dx} + \frac{1+2u+2u^2}{1+2u} = 0.$$

Разделим переменные:

$$\frac{(2u+1)\,du}{2u^2+2u+1} + \frac{dx}{x} = 0.$$

Интегрируя, получаем:

$$\frac{1}{2}\ln(2u^2+2u+1) + \ln|x| = \ln C,$$

---

[1] Или, что то же, $y' = f(x, y)$ однородно, если $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения, так как при $n = 0$ $f(tx, ty) = f(x, y)$.

$$x^2(2u^2+2u+1)=C^2,$$

$$x^2+2xy+2y^2+C.$$

Общее решение уравнения (4) представляет собой семейство обыкновенных эллипсов. Через каждую точку плоскости, исключая начало координат, проходит единственная интегральная кривая.

Пользуясь различными подстановками и приемами, Лейбниц и братья Бернулли решили ряд однородных линейных и других дифференциальных уравнений. Однако лишь в XVIII в. теория обыкновенных дифференциальных уравнений стала самостоятельной ветвью математического анализа.

§ 8. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ, ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ И СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИИ

В наше время прогресс науки неотделим от достижений талантливых математиков-прикладников.

Математик-прикладник не узкий ремесленник, а творец. Наряду с математикой ему необходимо и глубокое знание предмета прикладного исследования.

Б. В. Гнеденко

52. Обобщение понятия степени

Истоки понятия степени находятся в глубокой древности; дошедшие до нас глиняные плитки древних вавилонян содержат записи таблиц квадратов, кубов и их обратных значений.

Первоначально под степенью понимали произведение нескольких одинаковых сомножителей. Способы записи степеней и связанных с ними обратных величин — корней из числа менялись с течением времени, пока не приняли современную форму.

Долгое время понятие степени относили только к неизвестным. В III в. Диофант стал применять сокращенное обозначение неизвестного и его степени. Он ввел свои термины для названия степеней и особые символы для их обозначения. Диофант называл вторую степень «дюнамис» — сила, третью — «кюбос», четвертую дюнамо — дюнамис, x^2 он обозначал Δ^r, x^3 — K^r, x^5 — ΔK^r и т. д. Особыми знаками он обозначал и обратные значения неизвестной, т. е.

$$\frac{1}{x},\ \frac{1}{x^2},\ \ldots,\ \frac{1}{x^6}.$$

Дальнейшее развитие науки вызвало необходимость расширения понятия степени. В XIV в. французский епископ города Лизье в Нормандии Н. Орем (или Орезм, 1323—1382) впервые стал за-

менять в отдельных случаях корни из чисел дробными показателями степени и ввел символические обозначения степени с дробными показателями. Например, он записывал 8 как $\left[\overline{1^p\ \frac{1}{2}}\right]4$, т. е. в нашем обозначении $4^{1\frac{1}{2}}$, так как $4^3 = 64$, а $\sqrt{64} = 8$ и поэтому $8 = \sqrt{4^3}$. В других местах он записывал то же выражение несколько иначе: $\left[\overline{\frac{p \cdot 1}{1 \cdot 2}}\right]4$. Число $2^{1/2}$ он записывал как $\frac{1}{2}2'$. Показатели, введенные Оремом, по существу выступают в виде логарифмов чисел. Орем словесно сформулировал правила для выполнения различных операций со степенями.

Значительно позднее бухгалтер из Брюгге, а впоследствии военный инженер С. Стевин (1548—1620) вновь открыл дробные показатели и указал в более общем виде, что корень энной степени из числа a можно выразить как $a^{\frac{1}{n}}$, где $a > 0$, а записывал он это выражение так: ① . Введенные им обозначения показателей близко связаны с символами, которые он применял при введении десятичных дробей (напомним, что он писал вместо дробного числа 3,745 3⓪7①4②5③ или $^{0\ 123}_{3,745}$). Записывая выражение, содержащее степень, Стевин обозначал неизвестное кружком (○), а показатели степени располагал в этом кружке. Выражение, которое мы обозначаем x^3 или x^2, он записывал соответственно ③ , ② . В его работе находим, например, следующую запись:

3①Msec①Mter② вместо нашего $3xyz^2$. Здесь знак умножения обозначен символом M, sec означает второе, ter — третье неизвестное. Знак ○ для обозначения неизвестной применял и Жирар (1595—1632).

Степенью с нулевым показателем первым стал пользоваться самаркандский ученый ал-Каши в начале XV в. Независимо от него Н. Шюке в работе «Наука о числах в трех книгах» в 1484 г. применял нулевой, а также и отрицательный показатели. В его сочинении можно прочитать: «Кто умножит 8^3 на 7^{1m}... это умножение покажет 56^2». В современной записи это означает: $8x^3 \cdot 7x^{-1} = 56x^2$. У него показатели относятся к неизвестной, которая подразумевается стоящей за коэффициентами 8, 7, 56, а знак $1m$ указывает, что единица отрицательная. М. Штифиль (ок. 1486—1567) писал AAA вместо современной записи A^3.

У Ф. Виета в «Полной арифметике», вышедшей в 1544 г., использованы следующие символические записи: для первой степени — N (от первой буквы слова Numeris — число), для второй степени — Q (квадрат), для третьей степени — C (куб), для четвертой степени — QQ. Современная запись равенства $x^3 - 8x^2 + 16x = 40$ у Виета выглядела так: $1C - 8Q + 16$ N aequater 40. Aequater означает «=». Французский математик Эригон в «Курсе математики» обозначал степени буквы a в виде $a2$, $a3$, $a4$ вместо современного a^2, a^3, a^4. Англичанин Оутред в 1631 г. A^2 записывал как Aq и Ac вместо ныне принятого A^3, Aqc вместо A^5 и т. д. И только Декарт в своей «Геометрии» ввел современные обозначения степени, за исключением второй степени, которую он записывал как произведение двух множителей. Такую же запись сохранил и Гаусс, считая, по-видимому, что записи AA или A^2 равнозначны по своей сложности написания.

Завершили введение современного изображения степени англичане Джон Валлис и Исаак Ньютон. Валлис в 1665 г. впервые подробно рассмотрел вопрос о целесообразности употребления отрицательных и дробных показателей.

И. Ньютон в одном из писем в 1676 г. указал: «Как алгебраисты вместо AA, AAA и т. д. пишут A^2, A^3 и т. д., так я ... вместо $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ пишу a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} и т. д.».

Постепенное расширение понятия степени в науке шло таким образом, чтобы новые понятия нулевой, дробной и отрицательной степени не противоречили ранее принятым определениям степени и действий со степенями, а были бы подчинены тем же правилам, которые были выведены с самого начала для степеней с натуральными показателями. Иначе говоря, более широкое обобщенное определение степени согласуется с первоначальным. Таким образом, первоначальное понятие входит в обобщенное как частный случай более общего. Все основные свойства определения степени с натуральными показателями сохранились в неизменном виде и для самого общего понятия его, т. е.

$$(ac)^n = a^n c^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad (a^n)^m = a^{nm};$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

До начала XVII в. в математике избегали применять дробные и отрицательные показатели степени. Только в конце XVII в. в связи с усложнением математических задач появилась настоятельная необходимость распространить область определения показателя степени на все действительные числа. Обобщение понятия степени a^n, где n — любое действительное число, позволило рассматривать показательную функцию ($y = a^x$) на множестве действительных чисел и степенную функцию ($y = x^n$) на множестве положи-

тельных чисел, а при целых n степенная функция определена и для $x < 0$.

Л. Эйлер в двух главах «Введения в анализ» описал «показательные и логарифмические количества». В частности, в них сказано: «Показательные количества разнообразны, смотря по тому, будет ли переменным количеством один только показатель или, кроме того, еще и само возвышаемое количество; к первому роду относится a^z, ко второму y^z, даже и сам показатель может быть показательным количеством, как в выражениях aa^z, a^{y^z}, ya^z, x^{y^z}. Мы не будем останавливаться на дальнейшем подразделении этих количеств, так как природа их может быть понята достаточно ясно, если мы разберем первый вид a^z».

Замечательным достижением Эйлера в этой области было открытие связи между показательной и тригонометрическими функциями. Он установил: $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$, откуда при $x = \pi$ $e^{\pi\sqrt{-1}} = \cos\pi + \sqrt{-1}\sin\pi$ или $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$, а $e^{2\pi\sqrt{-1}} = 1$.

Показательная функция имеет важное значение в науке и технике. Многие явления природы можно выразить посредством функции $y = a^x$. В качестве примера можно указать на процесс распада радиоактивных веществ (радий, радон, уран и др.).

Обозначим через T промежуток времени, за который масса радиоактивного вещества убывает в два раза (T — период полураспада вещества). Для разных веществ T различно: для урана $T =$ $= 4{,}56$ млрд. лет, для радия $T = 1590$ лет и т. д. Если через x выразить отношение любого промежутка времени t к периоду полураспада T $\left(x = \frac{t}{T}\right)$, то x будет мерой времени распада вещества. Обозначим через y отношение массы (m) сохранившегося за это время вещества к первоначальной массе его M, т. е. $y = \frac{m}{M}$, иначе говоря, y — это доля вещества, оставшегося через t лет.

Оказывается, что процесс распада можно выразить формулой

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ или } m = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

Другим явлением, которое также можно выразить показательной функцией, служит размножение живых организмов.

53. Логарифмическая функция. Число e

Уравнение $x = a^y$ (1), в котором за неизвестную принято y, при $x > 0$ имеет один вещественный корень. Этот корень называют логарифмом числа x при основании a. Записывают такую зависимость формулой $y = \log_a x$ и называют логарифмической функцией.

График логарифмической функции — кривая, симметричная

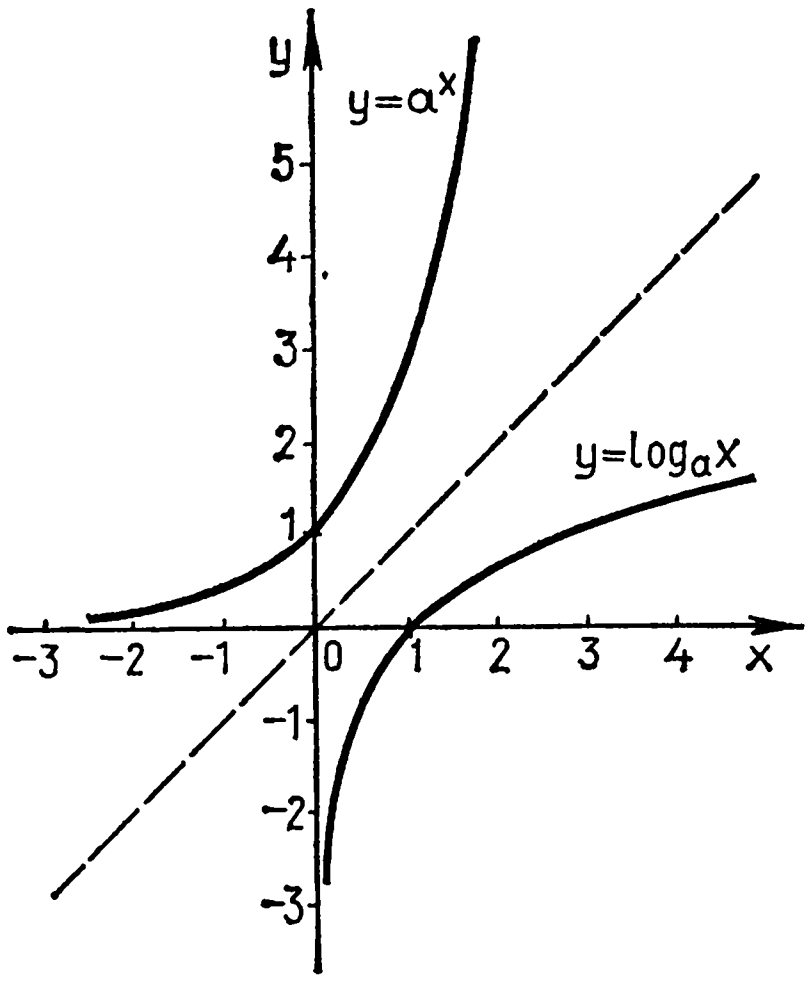


Рис 33.

графику показательной функции ($y = a^x$) относительно биссектрисы первого координатного угла xOy (рис. 33).

Зная свойства показательной функции, легко установить свойства логарифмической функции. Перечислим некоторые из них:

1) Область определения логарифмической функции — множество всех положительных чисел, а множество всех действительных чисел служит областью значений этой функции.

2) $\log_a a = 1$.

3) Если $x > 1$, то $\log_a x > 0$, и, наоборот, если $x < 1$, то $\log_a x < 0$.

4) $\log_a 1 = 0$.

5) $\log_a 0 \to -\infty$.

6) $\log_a x$ возрастает при возрастании x при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$.

Изобретение логарифмов, название их и первые таблицы логарифмов принадлежат шотландскому любителю математики Джону Неперу (1550—1617), хотя раньше его составил первые таблицы логарифмов также любитель математики — часовщик и мастер астрономических приборов швейцарец И. Бюрги (1552—1632), работавший вычислителем с астрономом И. Кеплером. Однако таблицы Бюрги были опубликованы в 1620 г., а таблицы Непера появились в 1614 г. Вычислением логарифмических таблиц эти талантливые люди занимались параллельно, но независимо один от другого. При составлении таблиц оба они руководствовались идеей, высказанной еще Архимедом, а затем более подробно исследованной М. Штифелем в работе «Общая арифметика» (1544). М. Штифель, сопоставив арифметическую и геометрическую прогрессии, указал многие свойства и зависимости двух этих рядов, а затем написал: «Можно было бы написать целую книгу об этих замечательных свойствах числовых рядов, однако этим ограничусь и пройду мимо с закрытыми глазами». И он действительно прошел мимо возможности применить свойства указанных прогрессий для совершенствования вычислений.

Разработка идеи Архимеда и Штифеля приводит к понятию логарифма. Из различных систем логарифмов замечательны две: логарифмы с иррациональным основанием $e = 2{,}7182818284\ldots$, которые носят название *натуральных*, и системы логарифмов с основанием 10, называемые *десятичными логарифмами*.

Допустим, в равенстве $x = a^y$ (1)

y получает последовательно значения:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ y,\ y+1, \tag{2}$$

тогда x выразится так: $1,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots,\ a^y,\ a^{y+1}$. (3)

Ряд (2) — прогрессия арифметическая, а ряд (3) — прогрессия геометрическая. Члены арифметической прогрессии (2) являются по сути логарифмами при основании a. Но в те времена показатели степени еще не употреблялись.

Непер и Бюрги должны были решить, какое число взять за основание, чтобы ряд (3) был гуще, т. е. чтобы разность между двумя соседними членами (Δx) была по абсолютному значению возможно меньше. Зная, что любая степень 1 равна 1, математики предположили, что числа вида $1 + 0{,}0001$ или $1-10^{-7}$ при последовательном возведении в степени 1, 2, 3, ..., n дадут числа, достаточно близкие по своему значению друг к другу. Поэтому Непер воспользовался последовательностью чисел $1-10^{-7} = 0{,}9999999$, а Бюрги — $1 + 10^{-4}$. Иными словами, первый использовал равенство $x = (1-10^{-7})^y$, а второй — $x = (1 + 10^{-4})^y$.

И. Бюрги начал свои вычисления и составление таблиц логарифмов в 1603 г. Он составил таблицу степеней $\left(1 \frac{1}{10^4}\right)^n$, при этом в неявном виде он допускал непрерывность между рядами (2) и (3). В 1611 г. Бюрги завершил составление таблиц и по настоянию И. Кеплера решил их опубликовать, но напечатаны они были только в 1620 г. под названием «Таблицы арифметической и геометрической прогрессий с обстоятельным наставлением, как ими пользоваться при всякого рода вычислениях». Однако таблицы Бюрги не получили широкого распространения, так как прежде появились таблицы Непера.

Непер составил таблицу логарифмов синусов. Взяв знаменателем прогрессии число $1 - \frac{1}{10^7} < 1$, он получил убывающий ряд, что позволило внести в таблицу больше чисел, среди которых два соседних составляли небольшую разность Δx. Допустим, разность значений рядом стоящих членов последовательности x_k и x_{k+1} будет Δx, причем им будут соответствовать в другой последовательности члены y и $y + 1$, тогда $\Delta x = a^{y+1} - a^y = a^y(a - 1)$, но $a^y = x$, поэтому $\Delta x = x(a - 1)$. У Непера $a = 1-10^{-7}$.

Положим, $y = -10^7 z$. В последовательности $x = (1-10^{-7})^y$ заменим y его значением, получим:

$$x = (1 - 10^{-7})^{-10^7 z}, \text{ или } x = [(1 - 10^{-7})^{-10^7}]^z. \tag{4}$$

Общий член последовательности (4) можно представить в виде $\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^z$, где $n = -10^7$. Иначе говоря, эта последовательность выступает в виде степеней числа $e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Таким образом,

z есть логарифм числа x по основанию $a = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Следовательно, неперовы логарифмы, преобразование которых мы выполнили, — это частный случай натуральных логарифмов, с основанием $e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Точнее, основанием неперовых логарифмов служит число $\frac{1}{e}$, так как показатель степени n отрицателен [Nep log y = $= 10^7(\ln 10^7 - \ln y) = 161180957 - 10^7 \ln y$]. Nep log $1 = 161\,180\,957$.

Во втором издании неперова «Описания удивительного канона логарифмов» (1618), вышедшем после смерти автора, сделано дополнение, в котором вычислено несколько натуральных логарифмов. В сделанном дополнении можно усмотреть подход к введению предела $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$. В том же году некоторые натуральные логарифмы были найдены Райтом. Позже англичанин Джон Спейдель опубликовал в 1620 г. «Новые логарифмы», которые содержали натуральные логарифмы чисел от 1 до 1000. Достаточно полные таблицы натуральных логарифмов появились только в 1770 г.

Таблицы Непера значительно упрощали труд вычислителя, но они все же были далеки от совершенства, что признавал и сам автор. Поэтому он вместе со своим другом профессором Генри Бриггсом (1561—1631) занялся составлением десятичных логарифмов. Вычисление этих логарифмов закончил после смерти Непера Бриггс и опубликовал в 1624 г. в «Логарифмической арифметике». Четырехзначные десятичные логарифмы Бриггса содержали целые числа от 1 до 20 000.

В 1628 г. голландский математик Андриан Влакк дополнил труды Непера и Бриггса — он издал десятичные таблицы целых чисел от 1 до 100 000. На основе этих таблиц в 1703 г. были напечатаны в России «Таблицы логарифмов и синусов, тангенсов и секансов тщанием и за освидетельствованием математических и навигацких школ учителей Андрея Фархварсона, Стефана Гвина и Леонтия Магницкого».

Многолетний труд талантливых и трудолюбивых математиков, затраченный на составление таблиц, впоследствии сторицей окупился тем, что тысячам вычислителей сохранил многие годы их жизни, сэкономив время при выполнении разнообразных сложных расчетов.

Таблицы логарифмов и логарифмическая линейка, сконструированная на их основе Оутредом (1574—1660), свыше 350 лет оставались надежным аппаратом для приближенных, но быстрых вычислений. Они в значительной мере содействовали ускорению научного и технического прогресса. Однако с появлением ЭВМ, которые способны ускорять процесс вычислений в миллионы раз, а особенно с изобретением портативных микрокалькуляторов ло-

гарифмические таблицы практически потеряли свое значение вычислительного аппарата.

Натуральные логарифмы имели и продолжают иметь не только практическое значение, но и чисто теоретическое в математическом анализе. В конце XVII и начале XVIII в. трудами И. Ньютона и Г. Лейбница были заложены основы математического анализа. Дальнейшая разработка и совершенствование математического анализа произошли благодаря усилиям Л. Эйлера, Н. Абеля, Ж. Даламбера, О. Коши и др. В работах этих математиков выкристаллизовалось учение о рядах[1].

Используя разложение в ряд, оказалось возможным быстрее и с заранее намеченной точностью находить пределы значений различных величин. Оказалось, что двучлен, взятый за основание натурального логарифма $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, при $n \to \infty$ стремится к определенному пределу. Коутс (Котес) в 1714 г. нашел, что этот двучлен можно представить в виде непрерывной дроби. А Эйлер выразил его так: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$;

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \ldots}}}}}$$ или

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cdots}}}}}$$

При определении значения числа e его разлагают в ряд:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots . \qquad (5)$$

Указанный ряд позволяет вычислить e с любой степенью точности. При $n = 12!$ для ряда (5) $e = 2{,}718281183\ldots$.

Число e можно определить уравнением $\ln e = 1$.

Замечательным свойством обладает график функции $y = e^x$. Если построить график функции $y = 2^x$ и найти, под каким углом кривая, соответствующая этой функции, пересечет ось Oy, то окажется, что угол между осью Oy и касательной к кривой выразится

[1] См. об использовании рядов для вычисления логарифмов на с. 235—238.

числом около 52°12′. График функции $y = 3^x$ пересечет ту же ось под углом ~42°20′. Можно предположить, что существует функция, график которой пересекает ось Oy под углом 45°. Оказывается, этой функцией будет $y = e^x$.

С середины XVII в. появилось предположение, что число e, так же как и число π, иррационально. Однако доказать эту догадку долгое время даже не пытались. После того как Л. Эйлер доказал, что $e^{xi} = \cos x + i \sin x$, и высказал предположение — числа e и π трансцендентны, И. Ламберт в работах «Предварительные сведения для ищущих квадратуру и спрямление круга» (1766) и в «Мемуаре о некоторых замечательных свойствах круговых и логарифмических трансцендентных количеств», отправляясь от разложения в непрерывную дробь числа e и $\frac{(1+e)}{(e-1)}$, воспользовавшись приемом Эйлера, доказал, что числа π и e иррациональны.

Эрмит, опираясь на предшествующие исследования, в 1873 г. доказал трансцендентность числа e, т. е. число e не может быть корнем никакого алгебраического уравнения.

Особый интерес к числам e и π, проявившийся в XVIII столетии, был вызван исключительной ролью, которую эти числа стали играть в математическом анализе. Они входят в большое число различных формул. Логарифмы по основанию e позволяют выражать математическую зависимость, которая характеризует разнообразные химические, физические и др. процессы. По-видимому, этим и объясняется название «натуральные логарифмы», т. е. естественные. Термин «натуральные логарифмы» ввел П. Менголи (1659), вслед за ним этим термином воспользовался Н. Меркатор (1668). Принятое ныне определение логарифма дано в работах Л. Эйлера. В его честь и число $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ стали обозначать буквой e, а само число назвали в честь Непера «неперовым числом».

§ 9. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ

54. Линейная алгебра. Системы уравнений

Так называемая *линейная алгебра* выросла из решения систем двух и трех линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными. Такие системы умели по-своему решать еще древние вавилоняне. В связи с поиском наиболее рациональных приемов решения n линейных уравнений с n неизвестными возникла и начала развиваться в XVII в. *теория определителей.*

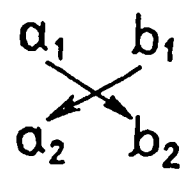
Для системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= n_1, \\ a_2x + b_2y &= n_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

выражение, состоящее из разности произведений для системы (1), $a_1b_2 - a_2b_1$ называют *определителем* или *детерминантом* второго порядка. Его принято записывать символически в виде матрицы (квадратной таблицы):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix},$$

где в первой строке коэффициенты неизвестных первого уравнения, а во второй строке коэффициенты неизвестных второго уравнения. Значение такой матрицы находят крестообразным умножением элементов и последующим вычитанием одного произведения из другого:



При вычитании со знаком «плюс» берут произведение со стрелкой, направленной вправо. Решение приведенной системы посредством определителей выразится так:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} n_1 b_1 \\ n_2 b_2 \end{vmatrix} = n_1b_2 - n_2b_1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 n_1 \\ a_2 n_2 \end{vmatrix} = a_1n_2 - a_2n_1,$$

т. е. каждое из неизвестных равно дроби, знаменатель которой есть определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, а числитель получается из этого определителя заменой коэффициентов при соответствующем неизвестном на свободные члены.

При решении системы трех уравнений применяют определители третьего порядка и для системы из n уравнений — определители n-го порядка. Механическое правило решения систем двух линейных уравнений по их коэффициентам дал в своей книге «О великом искусстве» (1545) итальянский математик Дж. Кардано. В одной рукописи 1683 г. японского математика Секи Кова Шинсуке древнекитайский метод фан-чен используется для изложения своеобразного учения об определителях. Еще в середине XVII в. буквенное исчисление потребовало введения индексов. В латинском издании «Геометрии» Декарта, опубликованной в 1649 г. нидерландским математиком Ф. ван Скоотеном, впервые употребляются индексы в виде $2C$, $3C$. В такой же форме а также в виде $C1$, $C2$ применяет индексы и Ньютон в своих «Началах» (1687) и в «Методе разностей» (1711). Лейбниц в 1693 г. вводит не только индексы,

которые пишет ниже строки, но и двойные индексы. Уравнение, которое мы теперь записываем в виде

$$a_{11}x + a_{12}\tilde{y} + a_{10} = 0,$$

Лейбниц записывал так: $1_0 + 1_1x + 1_2y = 0$; вместо a_{11}, a_{12}, a_{10} он писал соответственно 1_1, 1_2, 1_0 и т. п. Поскольку эти нововведения не были опубликованы (они содержатся лишь в одном письме Лейбница к Лопиталю), они не получили распространения.

Независимо от Секи Кова Шинсуке основы теории определителей заложил швейцарский математик Габриэль Крамер — друг и ученик Иоганна Бернулли. Известная под именем «правила Крамера» теорема была им сформулирована и доказана в 1750 г. в его работе «Введение в анализ кривых линий». В ней Крамер, применяя индексы, вводит понятия *перестановки* индексов и *беспорядка* в перестановках и дает правило определения знаков членов определителей.

Новый вклад в развитие теории определителей внес французский математик А. Вандермонд (1735—1796), именем которого поныне называют (без достаточного основания) определитель вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots\ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots\ldots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots\ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

В алгебре Вандермонд предвосхитил некоторые идеи Абеля. В 1772 г. он впервые предложил специальный символ для определителя, который, однако, распространения не получил.

Представление определителя в виде суммы произведений миноров и адъюнкт (алгебраическое дополнение) принадлежит Лапласу. В середине 70-х годов XVIII в. Лагранж доказал, что сумма произведений элементов ряда на соответствующие адъюнкты равна определителю, а сумма произведений ряда на адъюнкты элементов параллельного ряда равна нулю.

Термин «детерминант», иначе говоря «определитель (от латинского determino — определяю), в нашем смысле ввел Коши в 1815 г. Продолжая начатые французским математиком и астрономом Ж. Бине (1786—1856) исследования, О. Коши нашел уже все главные свойства определителей. Ряд фундаментальных работ по теории определителей принадлежит Карлу Густаву Якоби, брату знаменитого русского физика Б. С. Якоби. Дальнейшее развитие теория определителей получила в трудах английских математиков А. Кэли и Дж. Сильвестера (1814—1897). Первый из них и ввел поныне употребляемый знак определителя $| \, |$.

Как известно, аппарат теории определителей недостаточен для изучения таких систем линейных уравнений, у которых число неизвестных не совпадает с числом уравнений; исследование же та-

ких систем имеет большое значение во многих вопросах теоретического и прикладного характера. Отсюда разработка теории матриц, которая, как и линейная алгебра в целом, достигла большого развития в XIX в. Понятие матрицы и ее ранга ввел английский математик Дж. Сильвестер. Зачатки теории матриц имеются в трудах Бине, Коши и К. Якоби; теория алгебры матриц, как мы упоминали выше, была построена А. Кэли (1821—1895). Теория матриц применяется не только при исследовании систем линейных уравнений, но и во многих вопросах математического анализа, механики и физики.

Дальнейшее развитие линейной алгебры связано с изучением многомерных пространств, о которых речь идет в ч. II, § 23. Крупнейший вклад в развитие линейной, как и современной, алгебры в целом внесли советские ученые[1].

55. Об Этьене Безу и его теореме

Предложение о том, что остаток $r(x)$ от деления многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

на двучлен $x - a$ равен $f(a)$, называют «теоремой Безу». Она была впервые сформулирована и доказана французским математиком Этьеном Безу (1730—1783), членом Парижской Академии наук. Основные работы Безу относятся к высшей алгебре. Он занимался, в частности, разработкой приемов исключения неизвестных из систем уравнений и исследованием резольвент алгебраических уравнений; его работы в области линейных уравнений сыграли немаловажную роль в развитии теории определителей. В 1779 г. был опубликован в Париже его труд «Общая теория алгебраических уравнений», в котором содержится и теорема, указанная выше. Большой популярностью пользовались в последние три десятилетия XVIII в. и в первой половине XIX в. учебные руководства Безу по элементарной математике, опубликованные им в шеститомном «Курсе математики» (1764—1769) и переведенные на многие европейские языки, в том числе и на русский.

Как известно, доказательство теоремы Безу кратко и состоит в том, что, положив в тождестве

$$f(x) = (x - a)\, p(x) + r$$

$x = a$, получаем: $r = f(a)$. Как показывает опыт преподавания, это доказательство кое-кому кажется не совсем убедительным в связи с общим запретом деления на нуль (при $x = a$, $x - a = 0$). Как разъяснил А. И. Маркушевич, такие сомнения в законности доказательства (теоремы Безу) имеют свои корни в смещении операции деления над числами и над многочленами. Для того чтобы мно-

---

[1] См. ниже, ч. II, § 13.

гочлен-делитель $x - a$ не рассматривался как нуль (кольца многочленов), достаточно, чтобы не все его коэффициенты равнялись нулю, что выполняется для многочлена $x - a$, так как по крайней мере его коэффициент при x отличен от нуля. Другое дело, если бы мы хотели получить остаток от деления числовых значений многочленов $f(x)$ и $x - a$ при определенном значении переменной x; тогда следовало бы действительно исключить значение $x = a$. Но в теореме Безу нигде не говорится о частном числовых значений $f(x)$ и $x - a$ и фактически никакого деления не производится, а рассматриваются значения многочленов-функций от x при значении переменной $x = a$.

Из теоремы Безу вытекает ряд важных следствий, используемых в алгебре, некоторые из них обычно излагаются в школьных учебных руководствах. Обращаем внимание читателей на интересное обобщение теоремы Безу, найденное М. В. Яковкиным и изложенное им в статье «Свойства чисел, аналогичные теореме Безу»[1].

56. Об основной теореме алгебры

После открытия в середине XVI в. решения в радикалах алгебраических уравнений 3-й и 4-й степени математики смогли констатировать, что алгебраические уравнения 1—4-й степени имеют соответственно 1, 2, 3, 4 корня, которые могут быть положительными, равными нулю, отрицательными или мнимыми. Этот факт, естественно, наводил на мысль о том, что уравнение n-й степени ($n > 0$) должно иметь n корней. Впервые эту мысль явно высказал в 1629 г. замечательный математик Альберт Жирар в главном своем труде «Новое открытие в алгебре». Родом из Франции, протестант Жирар бежал от преследований католической церкви в Голландию, где, став учеником Симона Стевина, внес значительный вклад в развитие алгебры. Не установлено, была ли книга Жирара известна Декарту. Декарт в своей «Геометрии» (1637) ставит вопрос: «Сколько корней может иметь любое уравнение?» И тут же отвечает: «Итак, знайте, что всякое уравнение может иметь столько же различных корней, или же значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений», т. е. число корней уравнения может быть равно показателю степени уравнения. Он пишет: «может иметь» вместо «имеет». Он подразумевает только действительные корни, но дальше оговаривает, что если только *некоторые* из указанного числа корней действительные, то остальные мнимые.

Маклорен и Эйлер дали в 40-х годах XVIII в. основной теореме алгебры формулировку, равносильную современной: всякое уравнение с действительными коэффициентами можно разложить в произведение множителей 1-й и 2-й степени с действительными коэффициентами, иными словами, уравнение степени n имеет n корней, действительных или комплексных.

---

[1] См.: МШ, 1952, № 1.

Этой теоремой занимались не только Жирар, Декарт и другие ученые XVII в., но и величайшие математики XVIII и первой половины XIX в., в том числе Даламбер, Эйлер, Лагранж, Лаплас, Гаусс. Это объясняется тем, что главным предметом и содержанием алгебры указанной эпохи была теория решений уравнений, в которой центральное место занимала рассматриваемая теорема алгебры, именно поэтому и названная *основной*.

Первое доказательство основной теоремы алгебры было дано в 1746 г. Даламбером и носило преимущественно «аналитический» характер, будучи связано, например, с понятием непрерывности. Это вызвало недовольство многих математиков, стремившихся найти чисто алгебраическое доказательство[1], основанное на теории уравнений. Три года спустя Эйлер дал иное доказательство. Доказательство Эйлера, как и доказательство Даламбера, не было лишено недочетов. На это обратил внимание Лагранж, а после него — Гаусс, изложивший четыре различных доказательства основной теоремы алгебры, первое из которых было приведено в 1799 г. в его докторской диссертации. Все доказательства Гаусса не чисто алгебраические и не все вполне строгие. В настоящее время известен ряд вполне строгих доказательств этой теоремы. Установлено также, что без использования свойств непрерывности теорему доказать нельзя, т. е. не существует чисто алгебраического доказательства. Основная теорема алгебры относится, таким образом, к алгебре в смысле постановки вопроса, а большинство методов ее доказательств в равной мере относится и к анализу.

57. От классической алгебры к современной

Решение уравнений и систем уравнений, поныне составляющее основное содержание школьной алгебры, было главным предметом и науки алгебры примерно до середины XIX в.

Поиски корней одного уравнения любой степени с одним неизвестным привели к алгебраическому решению уравнений 1, 2, 3 и 4-й степени, к разработке алгебры многочленов, к теории приближенных вычислений корней уравнений, к расширению понятия числа, к установлению основной теоремы алгебры и, наконец, к установлению факта о невозможности решения в радикалах общего алгебраического уравнения степени выше 4-й. Именно в 1826 г. норвежский математик Н. Х. Абель окончательно доказал, что уже для общего алгебраического уравнения 5-й степени

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$$

не существует формулы, выражающей корни этого уравнения через его коэффициенты a_0, a_1, ..., a_5 с помощью алгебраических операций, т. е. сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корней. Это не означает, однако, что нет вообще уравнений 5-й

[1] См.: Башмакова И. Г. О доказательстве основной теоремы алгебры. — ИМИ. М., 1957, вып. X.

степени и выше ее, допускающих алгебраическое решение. Такие уравнения существуют. Вопрос о том, чем они характеризуются, был решен Эваристом Галуа[1], основоположником теоретико-группового метода исследования уравнений. Начиная с 70—80-х годов прошлого века в центр развития алгебры выдвинулись понятия *группы* и *множества*. Теория Галуа и теория множеств открыли новые пути к развитию алгебры, в частности путь к *абстрактной алгебре*. Предметом алгебраических исследований становятся *алгебраические операции* над элементами множества *произвольной природы*, широко обобщающие понятия арифметических действий сложения и умножения над числами. Параллельно с теорией групп развивается теория полей и теория колец.

Понятие системы гиперкомплексных чисел[2] или линейной ассоциативной алгебры приводит к общему понятию алгебры над полем P. Под гиперкомплексной системой ныне понимают кольцо K, в котором определяется умножение на элементы из P и требуется для любых двух элементов $a, b \in K$ и $m, n \in P$ выполнение следующих свойств: $0 \cdot a = 0$; $1 \cdot a = a$; $m(na) = (mn)a$; $(m + n)a = ma + na$; $m(a + b) = ma + mb$.

Теория алгебр изучает законы действий, выполняемых над величинами алгебр независимо от их природы. В общей теории алгебр важную роль играет *алгебра матриц*. Кроме *ассоциативных алгебр*, действие умножения в которых удовлетворяет ассоциативному закону, в XIX в. начались исследования неассоциативных алгебр, в частности *алгебр Ли*.

В первых трех десятилетиях текущего века возникла теория *структур*. Под структурой понимают частично упорядоченное множество, в котором определены две коммутативные и ассоциативные алгебраические операции: сложение и умножение, удовлетворяющие следующим условиям: 1) как сумма, так и произведение любого элемента множества с самим собою равны самому элементу; 2) если произведение двух разных элементов равно одному из них, то сумма тех же элементов равна другому, и обратно. Например, множество N всех натуральных чисел, в котором взятие наибольшего общего делителя определяется как операция сложения (или умножения), а взятие наименьшего общего кратного — как операция умножения (или сложения), является *структурой*. Действительно, как общий наибольший делитель двух чисел a и a, так и их общее наименьшее кратное есть само число a; если же общий наибольший делитель двух чисел a, b есть a (или b), то их общее наименьшее кратное есть b (или a).

Теория структур имеет тесные связи с геометрией, физикой, логикой и другими науками. В связи с математической логикой и абстрактной алгеброй в последнее время стала развиваться *общая теория универсальных алгебр*.

---

[1] См. ниже, § 13.
[2] См. ниже, § 14.

Глава IV.

ГЕОМЕТРИЯ

§ 10. КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД В ПРОСТРАНСТВЕ

Геометрия приближает разум к истине.
Платон

58. От элементарной к аналитической геометрии

Возникновение в первой половине XVII в. аналитической геометрии, установившей связь между алгеброй и геометрией, не было случайным. Оно было подготовлено как ходом развития математики до этого, так и общими потребностями производства, экономики, науки и торговли той эпохи.

Известно, что после Аполлония в Древней Греции не было крупных открытий в геометрии. В этой науке наступил длительный застой, причинами которого были не только политические и экономические условия, но и следующий существенный факт: геометрическая проблематика классического периода оказалась почти полностью исчерпанной. Все, что можно было сделать в геометрии с помощью ограниченного математического аппарата того времени, которым пользовались греки, было ими сделано, и сделанное вполне удовлетворяло запросам экономики, техники и науки.

Идеи Евдокса, Архимеда, Аполлония и других корифеев древней математики нельзя было развивать дальше без расширения понятия числа, введения в математику символики, идеи переменных величин и движения, без создания дифференциального и интегрального исчисления. Но такое революционное преобразование математики требовало не только длительного времени, но главным образом мощных внешних объективных факторов и стимулов, зависящих от производительных сил и производственных отношений. Лишь после великих географических открытий (Америки в 1492 г., морского пути в Индию в 1498 г.), которые вызвали дальнейшее бурное развитие производства, торговли, мореплавания и поставили задачи составления географических карт, определения места корабля в море, составления более совершенных тригонометрических и астрономических таблиц и разработки более рациональных методов вычисления, лишь после возникновения в ряде европейских стран новой формы производства, стало заметным дальнейшее интенсивное развитие науки и техники. В трудах Галилея и других

Р. Декарт

ученых была разработана новая механика, в которой нуждалось, впрочем, и военное дело, в частности баллистика, исследующая законы движения пуль и снарядов. Новое учение Коперника в астрономии привело к открытию Кеплером законов движения планет. Необходимость в более широких и точных наблюдениях небесных светил привела к построению целого ряда оптических инструментов и к развитию геометрической оптики. Все эти вопросы науки и техники поставили перед математикой ряд новых задач, неразрешимых старыми средствами и методами. Они-то и вызвали в XVII в. создание сначала *аналитической геометрии*, а затем дифференциального и интегрального исчисления.

В основе аналитической геометрии, созданной П. Ферма и Р. Декартом, лежат две идеи: 1) идея координат, приведшая к арифметизации плоскости, т. е. к тому, что каждой точке плоскости ставится в соответствие два числа, взятые в определенном порядке, и наоборот, 2) идея истолкования любого уравнения с двумя неизвестными как некоторой линии на плоскости и, наоборот, представления любой линии, определяемой как некоторое геометрическое место точек, соответствующим уравнением.

59. Система координат и начала аналитической геометрии у Ферма

Мы уже знаем, в чем состоит метод координат, и имеем понятие о том, как он используется для изучения свойств геометрических фигур и решения геометрических задач с помощью алгебры, т. е. для развертывания координатной, ныне называемой аналитической геометрии. Еще Виет назвал свою буквенную алгебру «аналитическим искусством», что дало повод его современникам и последователям называть всякие приложения алгебры к геометрии «аналитическими». Однако термин «аналитическая геометрия» в современном смысле был введен не ее создателями Ферма и Декартом, а гораздо позже французским математиком С. Лакруа, автором учебного руководства «Курс математики» (1796—1799)[1]. Первая же работа, содержащая некоторые начала аналитической геометрии, была написана примерно в середине 30-х годов XVII в. Пьером Ферма и названа им «Введение в учение о плоских и телесных

[1] Первой книгой, названной «Аналитическая геометрия», был учебник Г. Гарнье, изданный в Париже в 1808 г.

местах». К своим новым идеям Ферма пришел, основательно изучая, как и все великие математики того времени, классические труды древнегреческих ученых, в частности Аполлония. Ферма занимался даже восстановлением одного утерянного произведения Аполлония — «Плоские места». Греческие ученые древности называли «плоскими местами» прямую линию и окружность, а «телесными» — конические сечения. Термин «геометрические места» (плоское место, телесное место) появился тогда, когда в соответствии с идеями Аристотеля линию рассматривали не как множество точек, а как место, где расположены (лежат) точки.

В предисловии к «Введению» Ферма указывает, что древнегреческие ученые не обладали общими методами решения геометрических задач. Каждая задача трактовалась отдельно и независимо от других, с нею родственных. Отсутствие единого общего подхода к исследованию и решению задач, как и отсутствие символики, приводило к повторениям одного и того же и делало невозможным рационально классифицировать разрозненные задачи и обозревать их сущность с более широкой точки зрения. Ферма задался целью установить общий подход к исследованию геометрических мест. Он с самого начала заявляет, что всякое уравнение между двумя «неизвестными» представляет геометрическое место, описываемое концом одной из неизвестных. Его «неизвестные», т. е. переменные, являются отрезками (рис. 34). На прямой NZ (наша ось абсцисс), обозначаемой буквой A (наш x), он отмечает начальную точку N, затем при точке Z строит угол NZI (обычно прямой) и откладывает отрезок ZI (ординату), обозначаемый буквой E (наш y) и равный второй неизвестной. Конец ординаты I и описывает соответствующее геометрическое место.

Пользуясь подобием треугольников, Ферма доказывает, что прямая (в современной записи)

$$ax = by \qquad (1)$$

проходит через начало N. Он приводит к виду (1) и общее уравнение прямой. После этого переходит к изучению конических сечений, которым и уделяет бóльшую часть своей работы. У Ферма мы находим уравнения окружности ($x^2 + y^2 = a^2$), равнобочной гиперболы ($xy = k^2$), эллипса и гиперболы ($x^2 \pm a^2y^2 = b^2$).

Идея измерения абсцисс на некоторой фиксированной прямой NZ и определения точек любой прямой посредством их расстояний от некоторой фиксированной точки нам кажется теперь тривиальной, однако никто раньше Ферма и Декарта до такой «простой вещи» не додумался.

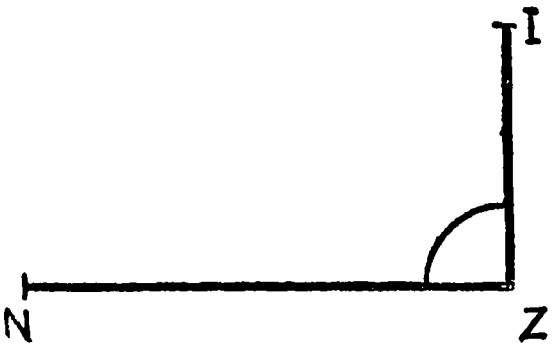


Рис. 34.

Одним из недостатков труда Ферма была ограниченность его системы координат. Во-первых, фиксированной считалась только ось абсцисс NZ. Ось ординат по существу отсутствует, она как бы подразумевается. Во-вторых, x и y принимают, как

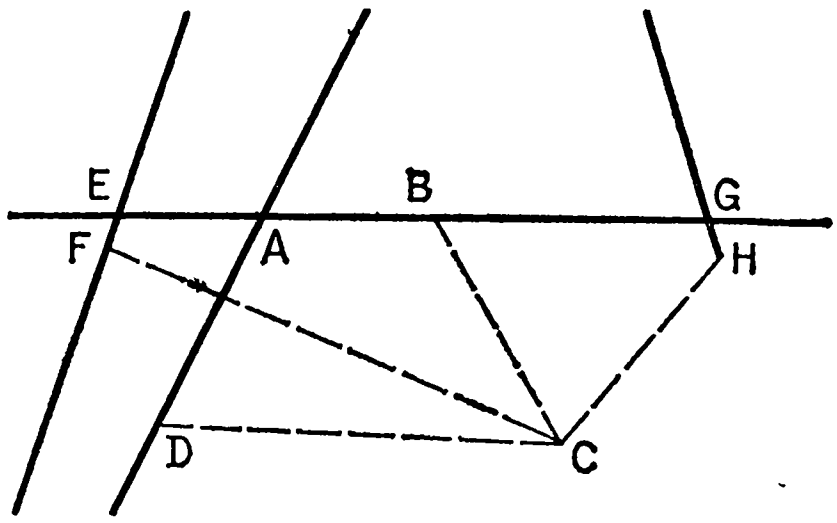


Рис. 35.

и в древности, лишь положительные значения. Фактически вся система координат состояла из одного, первого квадранта.

60. Задача Паппа и декартовы координаты

«Геометрия» Декарта была впервые опубликована на французском языке в 1637 г. в качестве одного из трех приложений к его философскому труду «Рассуждение о методе». В этом, как и в других своих произведениях, Декарт высказал мысль, что математика является важнейшим средством для понимания законов вселенной и лучшим подтверждением того, что человеческий разум способен найти истину в науке и познавать природу. Еще в 23-летнем возрасте Декарта озарила мысль о перестройке всех наук на математической, аналитической основе, мысль о создании одной единой и всеобъемлющей науки — «универсальной математики». Эта мысль его постоянно воодушевляла, хотя ему так и не удалось осуществить ее полностью. «Геометрия» Декарта и появилась как частичная реализация общей его идеи, как объединение арифметики и алгебры с геометрией.

Фактически «Геометрия» Декарта является алгебраическим трудом, и мало в ней можно найти из того, что мы сегодня называем «аналитической геометрией», однако основная идея последней — алгебраический способ исследования вопросов геометрии с помощью метода координат — в ней четко изложена. Декарт начинает с утверждения, что всякая геометрическая задача сводится в конце концов к нахождению длины или к построению некоторых отрезков, в связи с чем он развивает свое исчисление отрезков. Чтобы ввести в геометрию предлагаемый им алгебраический метод и доказать его превосходство над методами древнегреческих ученых, Декарт обращается к так называемой «задаче Паппа», известной в древности как задача «о геометрическом месте к трем или более прямым». Она состоит в следующем. Даны три, четыре или более прямых (на рисунке 35 их взято четыре: AB, AD, EF и GH). Известны расстояния d_1, d_2, d_3, d_4, ... от некоторой точки C плоскости до этих прямых (если эти расстояния CB, CD, CF и CH «наклонны» к прямым, что имеет место на нашем чертеже, то даются и углы наклона: $\angle CBA$, $\angle CDA$, $\angle CFE$ и $\angle CHG$). Требуется найти геометрическое место таких точек C, чтобы выполнялось условие: $\frac{d_1 \cdot d_3}{d_3^2} = k$ при трех прямых, $\frac{d_1 \cdot d_2}{d_3 \cdot d_4} = k$ при четырех прямых и т. д.

Эта задача восходит к доевклидовой эпохе, ее решением занимались многие математики, включая Евклида, Аполлония и Паппа,

но полного решения ей так и не было дано. Один только Аполлоний ее решил для 3-х и 4-х прямых.

Решение Декарта (устаревшее по форме и изложению и поэтому для нас довольно тяжелое) сводится к следующему. Он относит все линии к двум главным прямым: AB, называемую x, и BC. Последний отрезок он обозначает через y.

Прямая AB выбирается как ось X, точка A — как начало координат. Ось Y по существу отсутствует, но подразумевается как направленная параллельно BC. В целом система координат такая же, как и у Ферма. Для искомого геометрического места точки C Декарт после ряда выкладок получает уравнение

$$y = m - \frac{n}{z}\,x + \sqrt{m^2 + 0x + \frac{p}{m}\,x^2}\,. \qquad (1)$$

Это уравнение второго порядка, представляющее коническое сечение, в котором каждая буква означает некоторый отрезок (расстояние)[1]. Уравнение (1) представляет, по Декарту, длину отрезка BC, если AB или x берется неопределенным (т. е. как переменная). Далее Декарт занимается вопросом о том, какое именно коническое сечение изображает уравнение (1) при тех или иных значениях постоянных (коэффициент), входящих в него. Если радикал в правой части (1) равен нулю, пишет Декарт, то точка C описывает прямую $y = m - \frac{n}{z}\,x$. И в случае, если этот корень извлекается, искомое место будет некоторой прямой.

Значительная часть «Геометрии» посвящена методам алгебраического и графического решения уравнений.

Итак, не только у Ферма, но и у Декарта еще нет того, что мы называем *системой декартовых координат на плоскости*, есть только ось абсцисс с начальной точкой на ней. Хотя «Геометрия» Декарта еще не представляла собой настоящую аналитическую геометрию, все же она как наука развивалась именно под влиянием этой книги Декарта, а не под влиянием «Введения» Ферма, появившегося в печати лишь в 1679 г.

Из-за нелегкого стиля и нечеткого способа изложения «Геометрия» Декарта оказалась очень трудной для чтения. Уже в 1649 г. француз Ф. Дебон в своих «Кратких замечаниях» комментирует и несколько дополняет Декарта. Так же поступил голландский математик Франц ван Скоотен, издававший «Геометрию» Декарта на латинском языке в 1649 и 1659 гг. У ван Скоотена мы уже находим самостоятельное уравнение прямой $y = a - x$, преобразования координат и др. Дж. Валлис впервые ввел и отрицательные абсциссы, которые он применил наряду с отрицательными ординатами. Метод координат с трудом пробивал себе дорогу. Некото-

---

[1] Подробный вывод этого уравнения можно найти в кн.: Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики, составленная по первоисточникам. М., 1961, с. 216—222.

рые из продолжателей дела Декарта хотя и рисовали вторую ось координат, но не применяли ее. Существенным толчком для дальнейшего развития координатной геометрии на плоскости были небольшой труд Ньютона «Перечисление кривых третьего порядка» (1706) и книга его соотечественника Дж. Стирлинга «Ньютоновы кривые третьего порядка» (1717), в которых рисовались обе оси (хотя ось Y еще не считалась равноправной с осью X) и квадранты. Лишь Г. Крамер в своем «Введении в анализ алгебраических кривых» (1750) впервые по современному ввел ось Y, считая ее равноправной с осью X[1], и четко пользовался понятием двух координат точки на плоскости. Этого новшества, однако, еще нет во втором томе «Введения в анализ» (1748) Эйлера. С другой стороны, эта работа Эйлера, посвященная геометрии, явилась первой в современном смысле аналитической геометрии конических сечений. Близкие к современным новые обозначения и расположение материала плоской аналитической геометрии мы находим впервые у С. Лакруа в «Элементарном курсе прямолинейной и сферической тригонометрии и приложений алгебры к геометрии», который переиздавался много раз на протяжении целого столетия, начиная с 1798 г.

61. Аполлоний и его «Конические сечения»

Одним из величайших математиков древности был Аполлоний из Перги (Малая Азия), живший в III—II вв. до н. э. Еще юношей он отправился в Александрию, важнейший центр эллинистической культуры, где изучал математику у учеников Евклида. Аполлоний был и выдающимся астрономом. Он написал ряд работ по математике и оптике, подавляющее большинство которых до нас не дошло. Самое известное произведение Аполлония Пергского — это «Конические сечения». Этими вопросами занимались древнегреческие ученые и до Аполлония. Так, для решения задачи удвоения куба Менехм (IV в. до н. э.) пользовался параболой и равнобочной гиперболой. Примерно тогда же писал и Аристей «О пространственных местах», т. е. о конических сечениях, рассматриваемых как геометрические места. Его работа утеряна. Евклид написал «Начала конических сечений», которые до нас не дошли. Определяя площади и объемы, Архимед доказывал ряд вспомогательных предложений, относящихся к кривым второго порядка. Всем этим ученым уже было известно основное свойство каждого из конических сечений, его *симптом*, т. е. условие, которому оно удовлетворяет, равносильное нашему уравнению кривой. Так, мы находим у Менехма уравнения параболы ($y^2 = px$) и равнобочной гиперболы ($xy = a$). (Здесь мы пользуемся современными терминами и символами.) Аналогичные «симптомы» имеются у Архимеда.

---

[1] Оси X и Y считал равноправными еще Лейбниц.

Однако полное и систематическое учение об этих кривых было впервые изложено Аполлонием. Его труд «Конические сечения» состоял из восьми книг, из которых только первые четыре дошли до нас в оригинале, следующие три — в арабском переводе, последняя утеряна. В первой же книге Аполлоний в отличие от своих предшественников рассматривает все три вида кривых второго порядка как плоские сечения одного и того же произвольно взятого прямого или наклонного кругового конуса, полости которого простираются по обе стороны от вершины. Он получает эллипс, гиперболу или параболу в зависимости от того, пересекает ли плоскость одну только полость конуса, обе его полости или она параллельна одной из образующих конуса (рис. 36). Аполлоний впервые вводит термины «эллипс», «парабола», «гипербола». Он, как и его предшественники, устанавливает геометрически симптомы этих кривых, т. е., по-нашему, их уравнения Он, вероятно, сознательно не пользовался алгебраическими обозначениями, но многие из его выводов легко записать в виде уравнений, выражающих зависимость между координатами кривых. В современной записи получаем выражение

$$y^2 = 2px \pm \frac{p}{a} x^2, \qquad (1)$$

где эллипсу соответствует знак «минус» перед вторым членом правой части этого уравнения, гиперболе — знак «плюс», а параболе — равенство этого члена нулю. Отсюда и названия самих кривых. Для параболы площадь квадрата, построенного на ординате y некоторой ее точки (рис. 37), в частности, *равна* площади прямоугольника $D = 2px$, одна сторона которого равна соответствующей абсциссе x, а другая — постоянному отрезку $2p$ (удвоенному параметру па-

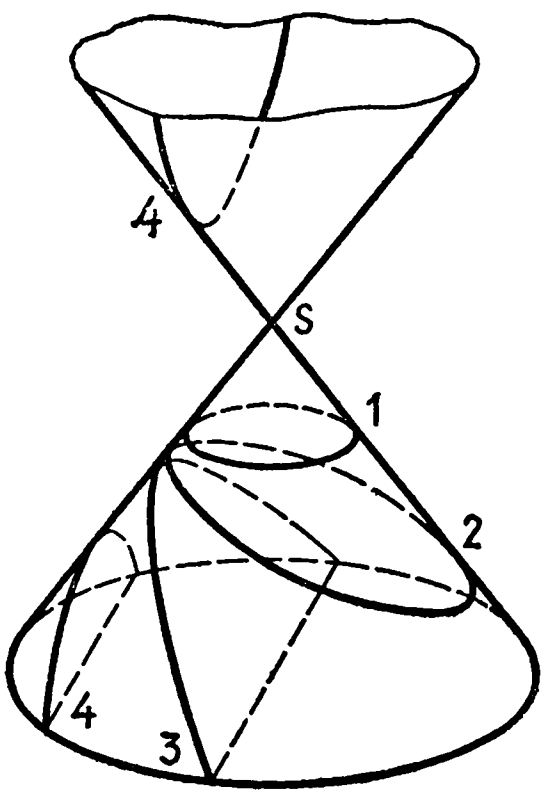


Рис. 36. Конические сечения.

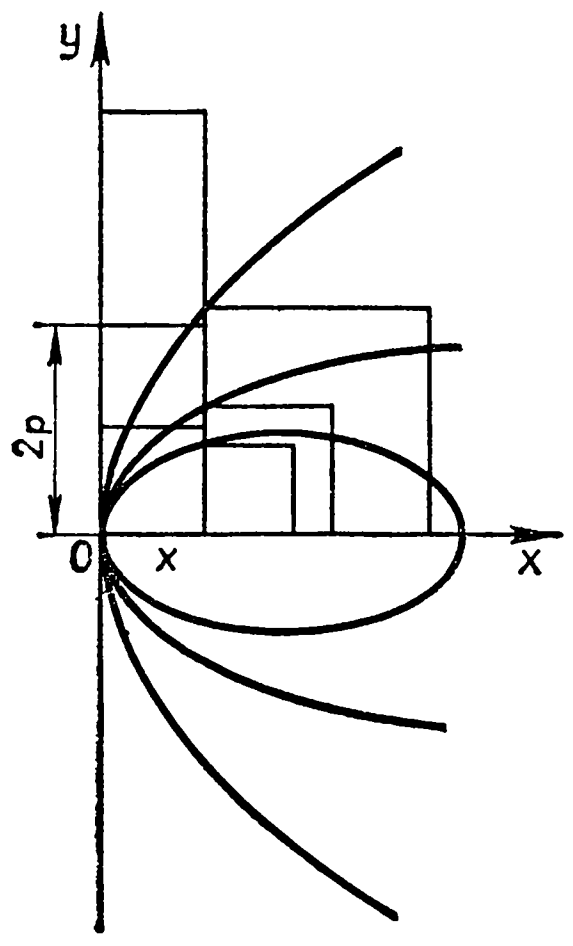


Рис. 37.

раболы). Греческое слово *parabole* и означает «приложение», т. е. построение прямоугольника с данным основанием ($2p$), равновеликого данному прямоугольнику или квадрату (y^2). Из уравнения (1) видно, что эллипс является геометрическим местом точек, для которых площадь квадрата, построенного на ординате, *меньше* площади прямоугольника D. Греческое слово *elleipsis* означает «недостаток». Гипербола же представляется уравнением (1) как геометрическое место точек, для каждой из которых площадь y^2 *больше* площади D. Отсюда и греческий термин *hyperbolé*, означающий «избыток», «преувеличение».

Аполлоний доказывает (мы выражаем его мысли современным языком), что вид уравнения, которым характеризуется каждое из трех конических сечений, не зависит от выбора линий (диаметра и сопряженной ему хорды), к которым оно отнесено, т. е. он доказывает инвариантность (неизменяемость) типа уравнения при преобразовании координат. Далее он находит касательные к кривым второго порядка. О касательных, сопряженных диаметрах и об асимптотах идет речь и во II книге его «Конических сечений». Греческое слово *asymptotos* означает «несовпадающий». Аполлоний показывает, что как бы далеко ни была продолжена асимптота, она с ветвью гиперболы не встречается, не совпадает. В III книге трактуется о секущих конических сечений, о полюсах и полярах, о фокусах эллипса и гиперболы. Впрочем, термин «фокус» (от латинского слова *focus* — очаг, огонь) ввел в 1604 г. Кеплер, которому было известно, что пучок лучей, направленных по диаметрам параболы, отразившись от параболы, собирается в ее фокусе, и если поместить в эту точку легко воспламеняемое вещество, то оно загорится.

В IV книге Аполлоний определяет число точек пересечения двух конических сечений и доказывает, что это число не превышает 4. В V — VII книгах он занимается специальными вопросами и доказывает среди многих других следующие три теоремы:

1) Сумма квадратов двух сопряженных диаметров эллипса постоянна и равна сумме квадратов главных осей.

2) Разность квадратов двух сопряженных диаметров гиперболы постоянна и равна разности квадратов главных осей.

3) Параллелограмм, построенный на двух сопряженных диаметрах эллипса или гиперболы, имеет постоянную площадь, равную площади прямоугольника, построенного на главных осях.

В древности применение конических сечений в науке было сравнительно ограниченным. Они служили в качестве вспомогательных линий при решении трех классических задач, а также уравнений 3-й и 4-й степени. В технике применение конических сечений также было невелико: было известно, что тень конца гномона в солнечных часах описывает коническое сечение; указанное выше свойство параболического зеркала (лежащее в основе устройства прожектора и параболического телескопа) стало известно только в средние века.

Важнейшую роль в науке и технике кривые второго порядка стали играть в новое время, после того как Галилей установил, что свободно брошенное тело или снаряд, выпущенный из орудия, двигается по параболе, а Кеплер сформулировал законы движения планет, согласно которым каждая из последних описывает эллипс, в фокусе которого находится Солнце. Позднее было установлено, что одни кометы движутся по эллипсам, другие — по параболам и гиперболам. Гиперболы и параболы стали применяться в строительном деле.

Теория конических сечений Аполлония была положена в основу «Введения» Ферма и «Геометрии» Декарта. У Аполлония не было общих произвольно взятых координат, но были координатный угол и координатные линии, всегда ориентированные по двум сопряженным направлениям кривой второго порядка. Этим он и предвосхитил идеи аналитической геометрии. Теория конических сечений, поныне являющаяся важнейшей темой плоской аналитической геометрии, — это одно из величайших достижений древнегреческой математики. На нее опирались в своих трудах не только Галилей и Кеплер, Ферма и Декарт, но и Дезарг, Паскаль, Лейбниц, Ньютон, Эйлер, Лагранж и другие великие ученые.

Богатейшее по содержанию учение Аполлония о конических сечениях послужило отправным пунктом для создания не только аналитической, но и проективной геометрии, о которой говорится в § 21.

62. Идея пространственных координат до Эйлера

Первое определение XI книги «Начал» Евклида гласит: «Тело есть то, что имеет длину, ширину и глубину». Как все евклидовы определения, это также имеет лишь описательный характер. Аналогичное определение тела встречается и в доевклидовой литературе, в частности у Аристотеля. Тем не менее есть основания полагать, что в древности нашего понятия о трехмерном пространстве не существовало. Такое понятие по-настоящему сформировалось и вошло в употребление вместе с арифметизацией и алгебраизацией геометрии, с введением понятия измерения как числа, с установлением в начале XVIII в. понятия пространственных координат.

У Декарта и Ферма имелись лишь далекие намеки на возможность распространения метода координат с двумерного пространства (плоскости) на трехмерное.

В одном из своих писем к Лейбницу в 1715 г. Иоганн Бернулли определил пространственные координаты x, y, z как перпендикуляры на три взаимно перпендикулярные плоскости. Примерно в то же время другие математики эпизодически вводят уравнения некоторых поверхностей в пространственных координатах. Первый, кто постоянно и широко использовал такие координаты, был французский математик Алексис Клод Клеро (1713—1765).

Уже в раннем детстве Клеро обнаружил незаурядные способ-

А К. Клеро

ности и глубокий интерес к математике. В десятилетнем возрасте Алексис основательно изучил «Анализ бесконечно мылых» Лопиталя и в возрасте 13 лет представил Парижской Академии наук первую свою геометрическую работу, в которой исследовал алгебраические кривые четвертого порядка. Знаменитый его труд «Исследования линий двоякой кривизны» был опубликован в Париже, когда автору едва исполнилось 18 лет. Благодаря этой работе А. Клеро был утвержден в должности адъюнкта Французской Академии наук. Начиная с 1736 г. после участия в Лапландской экспедиции для измерения дуги меридиана Клеро уделяет много внимания вопросам геодезии, астрономии и механики. Именно в связи со своими геодезическими работами Клеро пришел к оригинальному построению курса элементарной геометрии, который он сам преподавал и о трудностях преподавания которого часто беседовал с отцом.

В истории математики А. Клеро известен главным образом благодаря созданию новых важнейших понятий в области математического анализа. В опубликованной в 1743 г. работе «Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики», в которой была поставлена общая задача о фигурах равновесия медленно вращающейся неоднородной жидкости, Клеро впервые ввел понятие криволинейных интегралов. До этого он ввел понятие дифференциала функции нескольких независимых переменных, а на примере «уравнения Клеро» он создал также понятие общего и особого решения дифференциальных уравнений первого порядка. Одновременно с Эйлером Клеро дал условия интегрируемости линейных дифференциальных форм от двух и трех переменных.

Клеро дал первое решение задачи о движении перигея лунной орбиты под действием возмущающего притяжения Солнца. Этот результат был им изложен в работе «Теория движения Луны, выведенная единственно из начала притяжения, обратно пропорционального квадратам расстояний», представленной на конкурс Петербургской Академии наук. Академия опубликовала эту работу в 1752 г. и премировала ее автора, а в 1754 г. избрала его своим почетным членом. В области астрономии Клеро прославился не только разработкой теории движения Луны и исследованием формы Земли, но и исследованием движения кометы Галлея. В механике им была создана динамическая теория относительного движения.

Не менее важна роль Клеро в истории методики математики. Этот знаменитый французский математик, который состоял членом Академии наук Франции, Англии, России, Пруссии и других стран, создал в 40-х годах XVIII в. два замечательных учебника элементарной математики: «Элементы геометрии» и «Элементы алгебры».

В первом из них Клеро впервые сознательно и систематически применил так называемый генетический метод в преподавании геометрии.

В «Исследованиях линий двоякой кривизны» (1731) Клеро вводит третью координату z и для иллюстрации ясной для него идеи о том, что одно уравнение между координатами изображает некоторую поверхность, приводит следующие уравнения:

$$1)\quad xx + yy + zz = aa,$$

$$2)\quad yy + zz = ax,$$

$$3)\quad \sqrt{yy + zz} = \frac{n}{m}\, x \text{ и др.}$$

Он ввел также уравнение конуса, ряд уравнений поверхностей вращения и исследовал пространственные кривые, каждая из которых рассматривается как пересечение двух поверхностей и изображается двумя соответствующими уравнениями. Помимо уравнений шара, параболоида вращения и др., Клеро вывел и уравнение плоскости, подчеркнув, что оно всегда первой степени.

Систематическое изложение аналитической геометрии в пространстве впервые дал Л. Эйлер.

63. Аналитическая геометрия в пространстве в трудах Эйлера, его современников и последователей

Большая часть математических работ Л. Эйлера относится как известно, к области математического анализа. Тем не менее он посвятил более 75 трудов геометрии и разным ее применениям[1]. Он получил важнейшие результаты в теории алгебраических кривых и в дифференциальной геометрии и положил начало топологии, учению о симметрии и о других геометрических преобразованиях.

Опубликованный в 1748 г. второй том «Введения в анализ» Эйлера по праву считается первым курсом аналитической геометрии в современном смысле. Эта книга состоит из двух частей, первая из которых посвящена плоской аналитической геометрии, а вторая, названная автором «Приложения о поверхностях», — пространственной. Именно в «Приложении», состоящем из шести глав, дано первое систематическое изложение аналитической геометрии трех измерений. В главе I вводится система декартовых координат в пространстве, при этом рассматриваются 8 октантов, образованных плоскостями координат, излагаются условия симметрии относительно координатных плоскостей, находится расстояние между началом и любой точкой пространства. В главе II («О сечениях поверхностей какими-либо плоскостями») выводятся уравнения общих цилиндрических и конических поверхностей. В главе III излагается теория плоских сечений кругового цилиндра и конуса. Глава IV содержит вывод формул преобразования координат в пространстве с использованием знаменитых «углов Эйлера».

[1] См.: Эйлер Л. Интегральное исчисление. М., 1956, т. II, с. 3—16.

Глава V содержит исследование общего уравнения второго порядка с тремя переменными. В ней дана классификация квадрик, т е. поверхностей второго порядка, и выводятся канонические уравнения для эллипсоида, однополостного и двуполостного гиперболоидов и параболоидов. Гиперболический параболоид встречается здесь впервые. В последней главе содержатся примеры пространственных кривых.

Как первый том «Введения в анализ» Эйлера, так и второй отличаются большой доступностью изложения. Это послужило одной из причин широкого распространения книги, которая оказала значительное влияние на другие курсы аналитической геометрии XVIII в.

Развитию пространственной аналитической геометрии в большой мере способствовали Г. Монж и Ж. Лагранж. Первый в одной из своих работ о развертывающихся поверхностях, написанной им в 1771 г., поставил и решил такую задачу: найти уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M(x', y', z')$ и перпендикулярной к прямой, заданной уравнениями:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0.$$

Полагая, что уравнение искомой плоскости имеет вид:

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0,$$

он нашел, что

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma}, \text{ где } \alpha = ab_1 - a_1b \text{ и т. д.}$$

В других задачах Монж находит длину перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую, и т. п. Следует отметить, что именно в этой работе Монжа были решены простейшие основные задачи пространственной аналитической геометрии (на прямую и плоскость и т. п.), фигурирующие в настоящее время в первой части соответствующего курса, до теории поверхностей второго порядка.

Ж. Лагранж одним из первых применил методы пространственной аналитической геометрии к решению вопросов, входивших до этого в область элементарной геометрии; так, например, в 1773 г. в одной статье о трехгранных пирамидах он аналитически вычисляет для пирамиды длины ребер, площади граней и объем.

Известно, что если α, β, γ — углы, образованные некоторой плоскостью с тремя координатными плоскостями в прямоугольной декартовой системе координат, то имеет место соотношение

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Это соотношение впервые установил в 1780 г. французский математик Ш. Тенсо.

Аналитическая геометрия в пространстве приняла вид, близкий к современному, в упомянутом выше[1] курсе (начиная с четвертого его издания 1807 г.) С. Лакруа. В нем вопросы аналитической геометрии трех измерений начинаются с основных задач на точки, прямые и плоскости, при этом употребляются многие поныне сохранившиеся обозначения. Современные учебники аналитической геометрии от курсов XVIII—XIX вв. отличаются в первую очередь тем, что в них применяется теория определителей и матриц, а наряду с координатным изложением используется и векторное.

В последней четверти прошлого столетия начался следующий важнейший этап в развитии аналитической геометрии как науки: введение в нее учения о геометрических преобразованиях и теории инвариантов. Аналитическая геометрия имела большое значение для развития дифференциальной геометрии, проективной геометрии, аналитической механики и других разделов математики и физики. Она и в настоящее время необходима для изучения математики и естествознания. Исходя из двумерной и трехмерной, развилась *многомерная* и *бесконечномерная аналитическая геометрия* (§ 23). В известной мере продолжение идей классической аналитической геометрии отражено в современном *функциональном анализе*, обобщающем понятия математического анализа, и в общей *алгебраической геометрии*, связанной с теорией функций и с топологией.

§ 11. МНОГОГРАННИКИ

Я полагаю, что некоторые из ныне живущих или наших потомков найдут при помощи предлагаемого метода и другие теоремы, мной еще не открытые.

Архимед

64. Призма и пирамида

Подобно тому как треугольник в понимании Евклида не является *пустым*, т. е. представляет собой *часть плоскости*, ограниченную тремя неконкурентными (т. е. не пересекающимися в одной точке) отрезками, так и многогранник у него не пустой, не полый, а чем-то заполненный (по-нашему — частью пространства). В античной математике, однако, понятия отвлеченного пространства еще не было. Евклид определяет призму как телесную фигуру, заключенную между двумя равными и параллельными плоскостями (основаниями) и с боковыми гранями — параллелограммами. Для того чтобы это определение было вполне корректным, следовало бы, однако, доказать, что плоскости, проходящие через пары непараллельных сторон оснований, пересекаются по параллель-

[1] См. § 10; 59.

ным прямым. Евклид употребляет термин «плоскость» как в широком смысле (рассматривая ее неограниченно продолженной во все направления), так и в смысле конечной, ограниченной ее части, в частности *грани*, аналогично применению им термина «прямая» (в широком смысле — бесконечная прямая и в узком — отрезок). В XVIII в. Тейлор дал такое определение п р и з м ы: *это многогранник, у которого все грани, кроме двух, параллельны одной прямой*.

Пирамиду Евклид определяет как *телесную фигуру, ограниченную плоскостями, которые от одной плоскости* (основания) *сходятся к одной точке* (вершине). Это определение подвергалось критике уже в древности, например, Героном, предложившим следующее определение п и р а м и д ы: *это фигура, ограниченная треугольниками, сходящимися в одной точке, и основанием которой служит многоугольник*.

Важнейшим недостатком этого определения является использование неопределенного понятия основания. Тейлор определил пирамиду как многогранник, у которого все грани, кроме одной, сходятся в одной точке. Лежандр в «Элементах геометрии» так определяет пирамиду: «Телесная фигура, образованная треугольниками, сходящимися в одной точке и заканчивающаяся на различных сторонах плоского основания». После этой формулировки разъясняется понятие основания. Определение Лежандра является явно избыточным, т. е. содержит признаки, которые можно вывести из других. А вот еще одно определение, которое фигурировало в учебниках XIX в.: *пирамида — телесный угол, пересеченный плоскостью*.

Еще в древности существовали два пути определения геометрических понятий. Первый вел от фигур высшего порядка к фигурам низшего. Такой точки зрения придерживался, в частности, Евклид, определяющий поверхность как *границу тела*, линию — как *границу поверхности*, концы же линии — как *точки*. Второй путь ведет, наоборот, от фигур низшего измерения к фигурам высшего: движением точки образуется линия, аналогично из линий составляется поверхность и т. д. Одним из первых, который соединил обе эти точки зрения, был Герон Александрийский, писавший, что тело ограничивается поверхностью и вместе с этим может быть рассмотрено как образованное движением поверхности. В появившихся позже на протяжении веков учебниках геометрии принималась за основу то одна, то другая, а иногда и обе вместе точки зрения.

65. Симметрия в пространстве

Теорема, в которой утверждается, что все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке O, в которой они делятся пополам (рис. 38, *б*), напоминает аналогичное предложение из планиметрии: диагонали параллелограмма пересекаются в точке O,

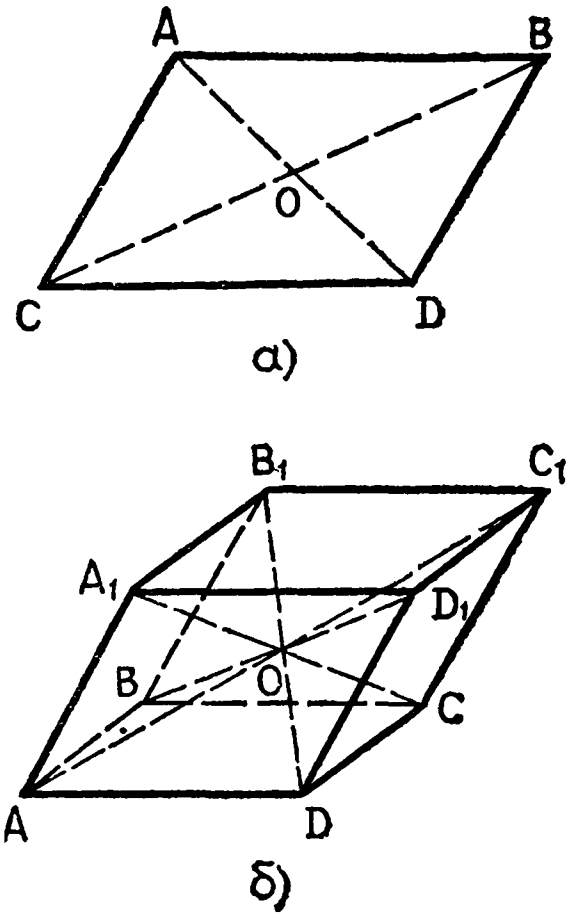


Рис. 38, *а*, *б*.

являющейся их серединой (рис. 38, *а*). Точка *О* — это центр симметрии параллелограмма. Аналогично называют и точку *О центром симметрии* параллелепипеда, так как вершины *А* и C_1, *В* и D_1, *С* и A_1, *D* и B_1 симметричны относительно точки *О*. Понятия центра симметрии в «Началах» Евклида нет, однако в 38-м предложении XI книги содержится понятие пространственной оси симметрии. Впервые понятие центра симметрии встречается в XVI в. в одной из теорем Клавиуса, гласящей: *если параллелепипед рассекается плоскостью, проходящей через центр, то он разбивается пополам и, наоборот, если параллелепипед рассекается пополам, то плоскость проходит через центр*. Лежандр, который впервые ввел в элементарную геометрию элементы учения о симметрии, говорит только о симметрии относительно плоскости и дает следующее определение: две точки *А* и *В* симметричны относительно плоскости α, если последняя перпендикулярна к *АВ* в середине этого отрезка. Лежандр показывает, что у прямого параллелепипеда имеются 3 плоскости симметрии, перпендикулярные к ребрам, а у куба 9 плоскостей симметрии, из которых 3 перпендикулярны к ребрам, а другие 6 проходят через диагонали граней. В учебниках наглядной геометрии XX в. (например, Бореля) учение о симметрии впервые излагается более полно и систематически и кладется даже в основу геометрических выводов.

66. Планиметрические понятия и предложения, их стереометрические аналоги. «Геометрия» Лобачевского и метод фузионизма

В предыдущем параграфе мы указали на некоторые стереометрические аналоги планиметрических понятий и предложений. Дадим короткий перечень таких аналогий.

На плоскости	В пространстве
1. Прямая	— Плоскость, а иногда прямая
2. Треугольник	— Тетраэдр
3. Параллелограмм	— Параллелепипед
4. Прямоугольник	— Прямоугольный параллелепипед
5. Квадрат	— Куб
6. Круг	— Шар
7. Из данной точки можно провести только одну прямую, параллельную данной	— Из данной точки можно провести только одну плоскость, параллельную данной
и т. д.	

О таких аналогах у Евклида нигде не упоминается, намеки на них появляются у его комментаторов в XVI—XVII вв. Особенно эти аналоги стали подчеркивать после формирования плоской и пространственной аналитической геометрии, т. е. начиная со второй половины XVIII в. Примеры:

	На плоскости	В пространстве
1.	$Ax + By + C = 0$ — уравнение прямой	$Ax + By + Cz + D = 0$ — уравнение плоскости
2.	$x^2 + y^2 = r^2$ — уравнение окружности	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ — уравнение сферы
	и т. д.	

Еще до открытия неевклидовой геометрии гениальный русский математик Н. И. Лобачевский написал в 1823 г. учебное руководство, озаглавленное «Геометрия». В нем впервые со всей четкостью отражена так называемая теперь *фузионистская* (от латинского *fusio* — литье, слияние) точка зрения, согласно которой планиметрию не следует по евклидовой манере отрывать от стереометрии; наоборот, обе эти части геометрии нужно по возможности объединить, т. е. аналогичные начала планиметрии и стереометрии следует преподавать параллельно. Так, рядом с кругом Лобачевский рассматривает шар и сферу; взаимное расположение прямых на плоскости он рассматривает совместно с взаимным расположением плоскостей в пространстве, почти одновременно трактует многоугольники и многогранники, измерение прямолинейных и телесных углов. Лишь в конце прошлого столетия итальянский математик Г. Веронезе также стал проводить в своих учебных руководствах по элементарной геометрии идею фузионизма. Метод фузионизма не потерял своего значения и в наши дни, особенно когда речь идет о повторении всего пройденного материала.

67. «Теорема Эйлера» о многогранниках

Основными элементами любого многогранника являются его вершины, число которых обозначим через B, число ребер — через P и число граней — через $Г$. Несмотря на различие свойств многогранников, есть и общее для всех выпуклых многогранников характерное свойство, а именно: *сумма числа вершин и числа граней каждого многогранника на два больше числа его ребер*, т. е.

$$B + Г - P = 2. \qquad (1)$$

Заметим, что это предложение, известное под названием «теоремы Эйлера», справедливо не только для выпуклых многогранников, но и для любых многогранников, поверхности которых можно получить непрерывной деформацией сферы. Поэтому это предложение относится к тому разделу математики, который изучает свойства геометрических фигур, не изменяющихся при непрерывных деформациях, — топологии. Эйлер доказал эту теорему

в «Доказательстве некоторых из замечательных свойств, которыми обладают тела, ограниченные плоскими гранями». Эйлер доказывал, что при удалении одной из вершин выпуклого многогранника и при замене его выпуклым многогранником, обладающим оставшимися вершинами (такой многогранник называют выпуклой оболочкой оставшихся вершин), число $B + Г - P$ не изменяется, а таким образом можно дойти до тетраэдра, для которого справедливость этой теоремы легко проверить. Позже были даны доказательства этой теоремы, справедливые и для невыпуклых многогранников указанного вида.

68. Объемы многогранников. Теорема Дена — Кагана

Непосредственного вычисления объемов многогранников и других тел у Евклида нет, есть лишь сравнение их. В одном только своем предложении (XII_1), в котором доказывается, что треугольная призма разлагается на три равновеликих треугольных пирамиды, Евклид косвенно дает формулу для вычисления объема пирамиды.

Проблема нахождения объема пирамиды и круглых тел принципиально отличается от вопроса определения объема параллелепипедов. Для последних имеет место теорема, аналогичная той, которую доказал в 20-х годах прошлого столетия венгерский математик Фаркаш Бояй (отец Яноша, одного из создателей неевклидовой геометрии) и австрийский математик П. Гервин: *любые два равновеликих многоугольника равносоставлены.*

На II Международном конгрессе математиков, состоявшемся в 1900 г. в Париже, Давид Гильберт обратил внимание ученых на 23 важнейшие и тогда еще не решенные задачи, в том числе и на следующую: можно ли распространить теорему Бояй — Гервина на пространство? Или: всякие ли два равновеликих (имеющих один и тот же объем) многогранника равносоставлены (т. е. могут быть разложены на одинаковое число попарно равных многогранников)?

Отрицательный ответ на этот вопрос дали немецкий математик М. Ден в 1901 г. и наш геометр В. Ф. Каган в 1903 г.[1], по-разному доказавшие, что не любые два равновеликих многогранника можно разложить на одинаковое число соответственно равных между собой частей. В частности, доказательство равновеликости, применяемое при выводе объема параллелепипеда, для пирамиды неприменимо. Для доказательства того, что пирамида есть третья часть призмы той же высоты и с тем же основанием, необходимо неявно или явно использовать операцию перехода к пределу. Вот почему формулу объема пирамиды можно строго установить либо античным методом исчерпывания, либо современным методом пределов.

---

[1] Каган В. Ф. О преобразовании многогранников. М., 1933.

69. Из истории вычисления объема пирамиды

Для частного случая четырехугольной пирамиды с двумя боковыми гранями, наклоненными под углом 45° к горизонтальному основанию, объем был вычислен еще древними вавилонянами. Формула объема любой пирамиды (и конуса) была впервые найдена Демокритом из Абдеры[1]. Это было окончательно установлено после открытия петербургским приват-доцентом П. Керамевсом в начале XX в. в Константинополе одного важнейшего сочинения Архимеда, теперь называемого сокращенно *эфод* (метод), которое было изучено известным датским ученым И. Гейбергом. В этом сочинении, составленном в виде «Послания к Эрастофену», Архимед, обращаясь к последнему, пишет: «Зная, что ты являешься, как я говорю, ученым человеком и по праву занимаешь выдающееся место в философии, а также при случае можешь оценить и математическую теорию, я счел нужным написать тебе и в этой же самой книге изложить некоторый особый метод, при помощи которого ты получишь возможность при помощи механики находить некоторые математические теоремы. Я уверен, что этот метод будет тебе ничуть не менее полезен и для доказательства самих теорем. Действительно, кое-что из того, что ранее было мною усмотрено при помощи механики, позднее было также доказано и геометрически, так как рассмотрение при помощи этого метода еще не является доказательством; однако получить при помощи этого метода некоторое предварительное представление об исследуемом, а затем найти и само доказательство, гораздо удобнее, чем производить изыскания, ничего не зная. Поэтому и относительно тех теорем о конусе и пирамиде, для которых Евдокс первый нашел доказательство, а именно, что всякий конус составляет третью часть цилиндра, а пирамида — третью часть призмы с тем же самым основанием и равной высотой, немалую долю я уделю и Демокриту, который первый высказал это положение относительно упомянутых фигур, хотя и без доказательства. И нам довелось найти публикуемые теперь теоремы тем же самым методом, как и предыдущие; поэтому я и решил написать об этом методе и обнародовать его, с одной стороны, для того, чтобы не оставались пустым звуком прежние мои упоминания о нем, а с другой, поскольку я убежден, что он может принести математике немалую пользу; я предполагаю, что некоторые современные нам или будущие математики смогут при помощи указанного метода найти и другие теоремы, которые нам еще не приходили в голову»[2].

Указание Архимеда о том, что Демокрит нашел объем пирамиды «без доказательства», следует понимать в смысле «без строгого доказательства». Демокрит действительно, вероятно, рассматри-

---

[1] О способе определения Демокритом площадей и объемов см. гл. I, 3, 8; гл. III, 42.

[2] См.: Архимед. Соч. М., 1962, с. 299.

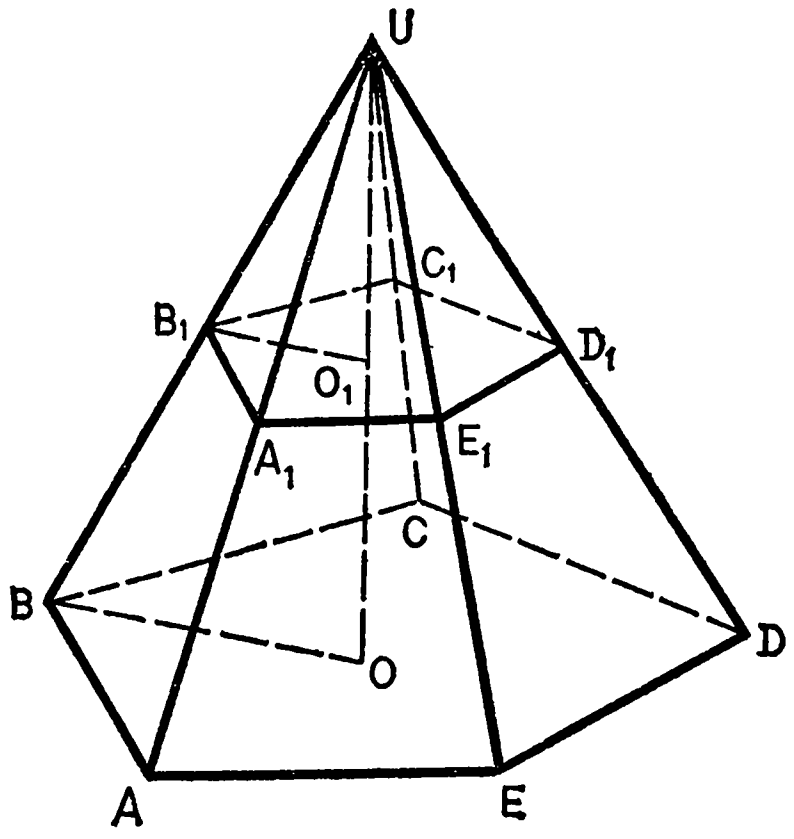


Рис. 39.

вал пирамиду (конус) как сложенную из бесконечно тонких и подобных друг другу пластинок (кружков), позже названных неделимыми. Именно о таком методе, употреблявшемся и Архимедом и названном им *особым* или *механическим*, и говорится в приведенной цитате из «Эфода». Под строгим же геометрическим доказательством Архимед понимал метод исчерпывания с применением доказательства от противного, которым впервые пользовался Евдокс Книдский для вывода формулы объема пирамиды. Евдоксу и принадлежит учение о пирамидах, требующее, как и учение о круглых телах, применения метода исчерпывания, содержащегося в XII книге «Начал» Евклида. Этим методом, в частности, доказывается пятое предложение XII книги, представляющее собой основную т е о р е м у в учении о пирамидах: *трехгранные пирамиды, имеющие равные высоты и равновеликие основания, равновелики.* Идея и детали доказательства этой ныне называемой «леммы о пирамидах» в «Началах» вполне аналогичны тем, которые изложены в XII_2 и воспроизведены нами в I главе, 7.

Лемма о пирамидах обычно доказывается в наших учебниках с помощью приема, названного «чертовой лестницей» и основанного на теории пределов. По распространенному мнению, «чертова лестница» была впервые введена в элементарную геометрию Лежандром[1].

В некоторых старых учебниках (например, Фусса, Безу и др) и в части современных руководств для вывода формулы объема пирамиды (и других тел) применяется *принцип Кавальери: если при пересечении двух тел плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечении всегда получаются равновеликие между собой фигуры, то объемы этих тел равны.* Наконец, другие математики-педагоги, в том числе Н. И. Лобачевский, отстаивали, а многие и ныне отстаивают применение метода интегрирования. По существу этим методом вычисляли площади и объемы тел еще Архимед, а в новое время Кеплер, Кавальери, Ферма, Валлис и многие другие. Однако здесь имеется в виду интегри-

---

[1] Д. Д. Мордухай-Болтовский считает, что доказательство Лежандра является по существу последним случаем применения метода исчерпывания. См.: Е в к л и д. Начала. М.; Л., 1950, кн. XI—XV, с. 253.

рование в современном смысле и с применением современной символики.

Пусть требуется, например, найти объем V пирамиды $UABCDE$ (рис. 39), зная площадь S ее основания и ее высоту $UO = h$. Пусть $F(x)$ — площадь произвольного сечения $A_1B_1C_1D_1E_1$, параллельного основанию и находящегося на расстоянии x от вершины. В силу подобия фигур $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$, $F(x)$ связана с переменной x соотношением

$$\frac{F(x)}{S} = \frac{x^2}{H^2},$$

откуда

$$F(x) = \frac{S}{H^2} x^2.$$

Объем части тела можно представить в виде $F(x)dx$. Тогда искомый объем V как предел соответствующей интегральной суммы объемов всех частей тела представится в виде следующего определенного интеграла[1]:

$$v = \int_0^H F(x)\,dx = \frac{S}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{S}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3} SH,$$

т. е. объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.

70. Об одной усеченной пирамиде в Московском папирусе

В древнейших египетских и вавилонских памятниках отсутствуют примеры на вычисление объема полной пирамиды, но в них встречается вычисление объема усеченной пирамиды с квадратным основанием. У вавилонян последняя рассматривается как частный случай призмы.

Объемы усеченных пирамид с квадратным основанием вычисляются как объемы параллелепипедов, вместо площади основания которых берется средняя арифметическая площадей оснований усеченной пирамиды.

Самой интересной из известных задач Древнего Египта является 14-я задача Московского папируса, написанного около 4000 лет назад.

В ней вычисляется, вероятно впервые в истории, объем усеченной пирамиды. Задача сопровождается чертежом (рис. 40), который в современной записи выглядит, как на рисунке 41. Знак

---

[1] См. гл. I, § 7.

«идущих ног» означает возведение в квадрат, а пирамида изображена в виде трапеции. Нижнее основание равно 4, верхнее — 2; их площади соответственно равны 16 и 4. Высота равна 6. Текст решения задачи примерно таков:

«Действия с .

Как скажут тебе: «усеченная пирамида» в 6, в «площади» по 4 в нижней, по 2 в верхней.

Действуй ты: сделай 4 эти ; получается теперь 16.

Действуй ты: удвой 4; получается теперь 8.

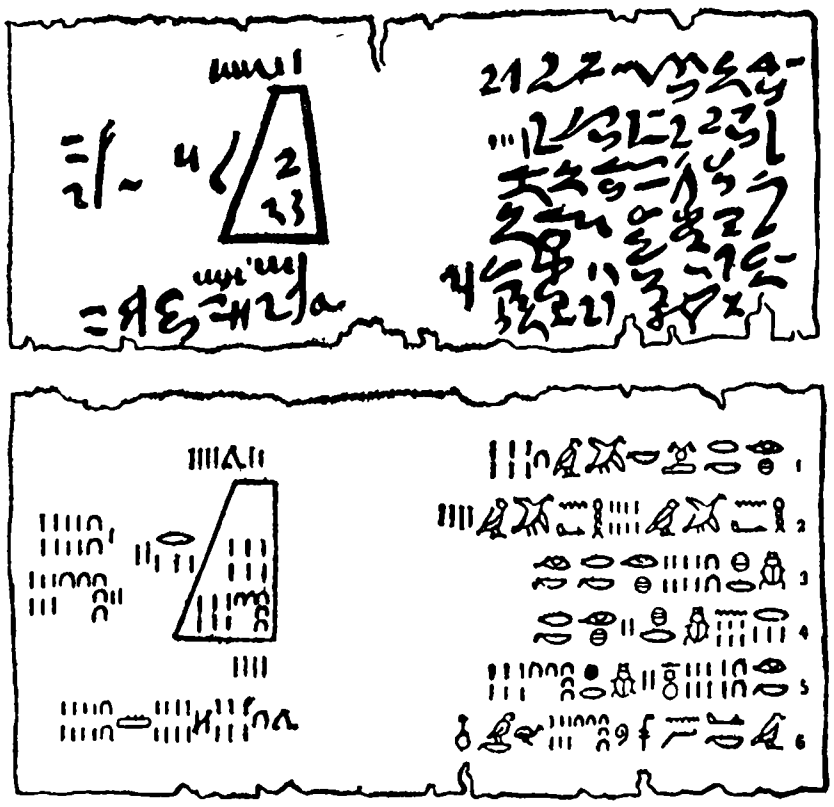


Рис. 40. Вычисление объема усеченной пирамиды в Московском папирусе. Вверху иератическая запись, внизу иероглифическая транскрипция.

Действуй ты: сделай 2 эти ; получается теперь 4.

Действуй ты: сложи ты эти 16 вместе с этими 8, вместе с этими 4; получается теперь 28.

Действуй ты: сделай ты $\frac{1}{3}$ от 6; получается теперь 2.

Действуй ты: делай ты 28 раз 2; получается теперь 56.

Смотри: она в 56.

Нашел ты хорошо».

Вычисление соответствует формуле

$$V = \frac{h}{3}\,(a^2 + ab + b^2),$$

где h — высота усеченной пирамиды, a и b — стороны верхнего и нижнего оснований.

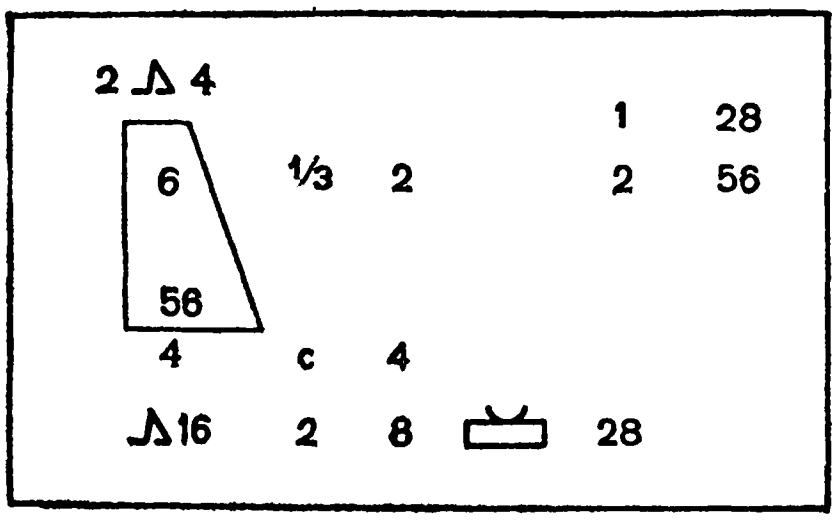


Рис. 41.

Пытаясь объяснить, каким образом египтяне пришли к этой формуле, Д. Мордухай-Болтовский считает: «Мы не должны принимать за абсолютно достоверный факт, что египтяне знали общую формулу объема усеченной пирамиды, не говоря уже о том, что они

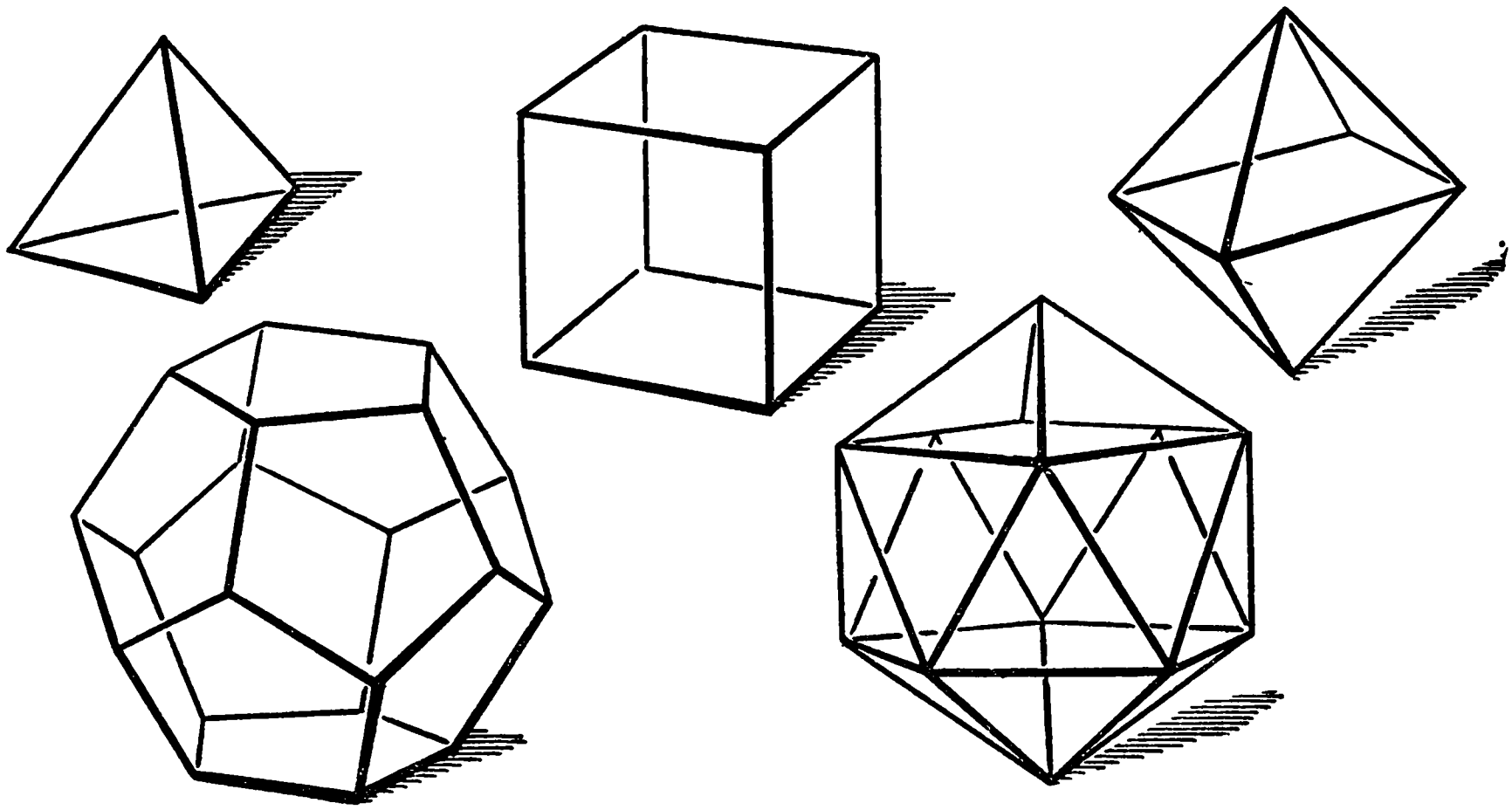


Рис. 42. Правильные выпуклые многогранники.

умели ее доказывать»[1]. Идея доказательства предложений, т. е. дедуктивного построения геометрии, возникла гораздо позже в Древней Греции.

71. О правильных многогранниках

Учение о правильных многогранниках, содержащееся в последней, XIII книге Евклида, является венцом его «Начал».

Сначала Евклид устанавливает существование этих многогранников, а именно показывает, как вписать в сферу правильный (рис. 42):

1) *тетраэдр* (от греческих слов «тетра» — четыре и *(h)édra* — грань)[2], имеющий 4 грани, 4 вершины, 6 ребер;

2) *гексаэдр* («гекса» — шесть): 6 граней, 8 вершин, 12 ребер;

3) *октаэдр* («окто» — восемь): 8 граней, 6 вершин, 12 ребер;

4) *додекаэдр* («додека» — двенадцать): 12 граней, 20 вершин, 30 ребер;

5) *икосаэдр* («эйкоси» — двадцать): 20 граней, 12 вершин, 30 ребер.

После этого Евклид доказывает в 18-м, последнем предложении XIII книги, что, кроме упомянутых пяти тел, нет других правильных многогранников.

Некоторыми сведениями о многогранниках обладали еще древ-

---

[1] См.: Евклид. Начала. М.; Л., 1950, кн. XI—XV, с. 247.

[2] В сложных словах *h* выпадает, что обозначено скобками.

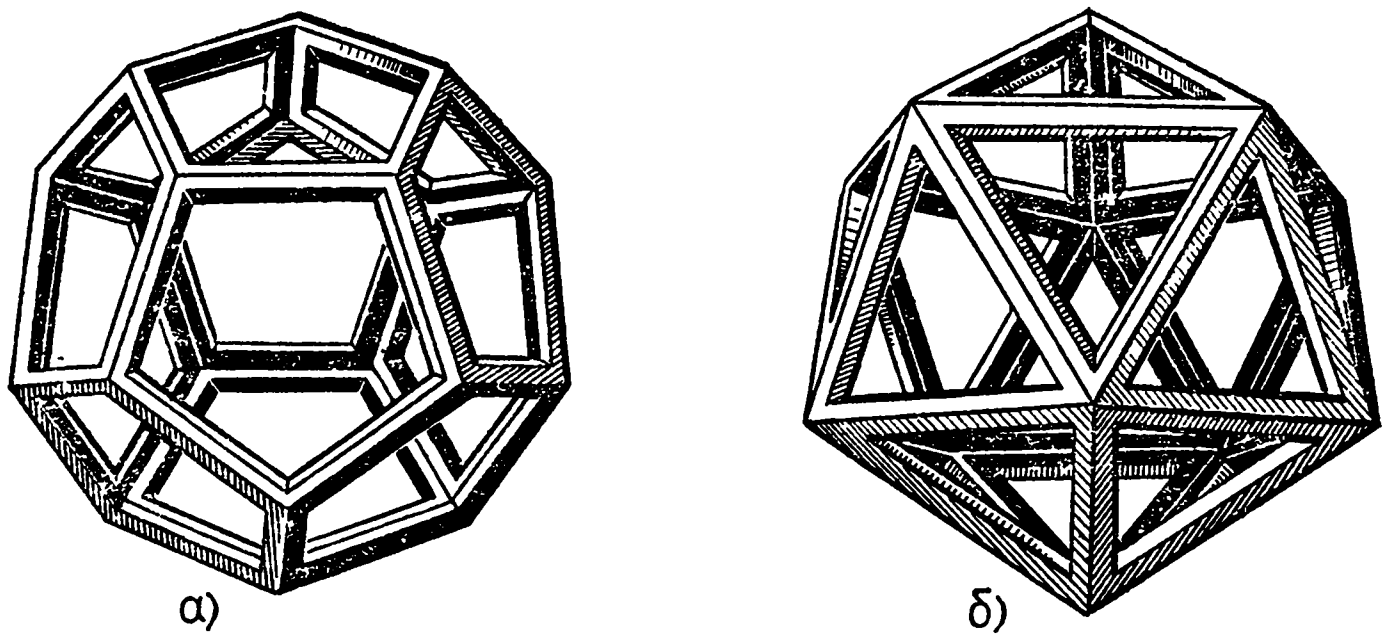


Рис. 43. Правильные додекаэдр и икосаэдр, нарисованные Леонардо да Винчи для книги Луки Пачоли «О божественной пропорции».

ние египтяне. Древнегреческий математик Прокл (V в.) приписывает построение пяти правильных многогранников Пифагору, однако, как было установлено позже, Пифагор мог знать, самое большее, гексаэдр (куб), тетраэдр и додекаэдр, в то время как октаэдр и икосаэдр были, вероятно, открыты лишь Теэтетом Афинским в IV в. до н. э. Последнего считают также автором X и XIII книг «Начал» Евклида.

Пифагорейцы, которые утверждали, что «все есть число», уделяли в своих космологических теориях особенно важное место правильным многогранникам, неоценимое превосходство которых над всеми другими телами они усмотрели в том, что их *только пять*, причем каждый из них имеет свое специфически индивидуальное число граней, вершин и ребер. В античной философии первоосновой бытия считались четыре элемента (стихии) природы: земля, вода, воздух и огонь. Древнегреческий философ-идеалист Платон, ничего не добавивший к математической теории многогранников, придавал атомам этих «стихий» форму тетраэдра, куба, октаэдра и икосаэдра. Форму додекаэдра Платон придавал всему миру в целом. Этим объясняются такие названия, которые получили правильные многогранники: «космические фигуры», «идеальные фигуры», «платоновы тела». Сочинение Аполлония о додекаэдре и икосаэдре до нас не дошло. Ему принадлежит теорема о том, что отношение объемов октаэдра и икосаэдра равно отношению их поверхностей. (Проверьте!, рис. 43.)

Правильными многогранниками занимался, по свидетельству Паппа Александрийского (которому, впрочем, принадлежит отличное от евклидова построение пяти правильных многогранников), и Архимед, однако и эти работы до нас не дошли.

Архимеду принадлежит открытие 13 так называемых *полуправильных многогранников*[1] («архимедовых тел»), каждый из которых

[1] См: Архимед. Соч. М., 1962, с. 383—386.

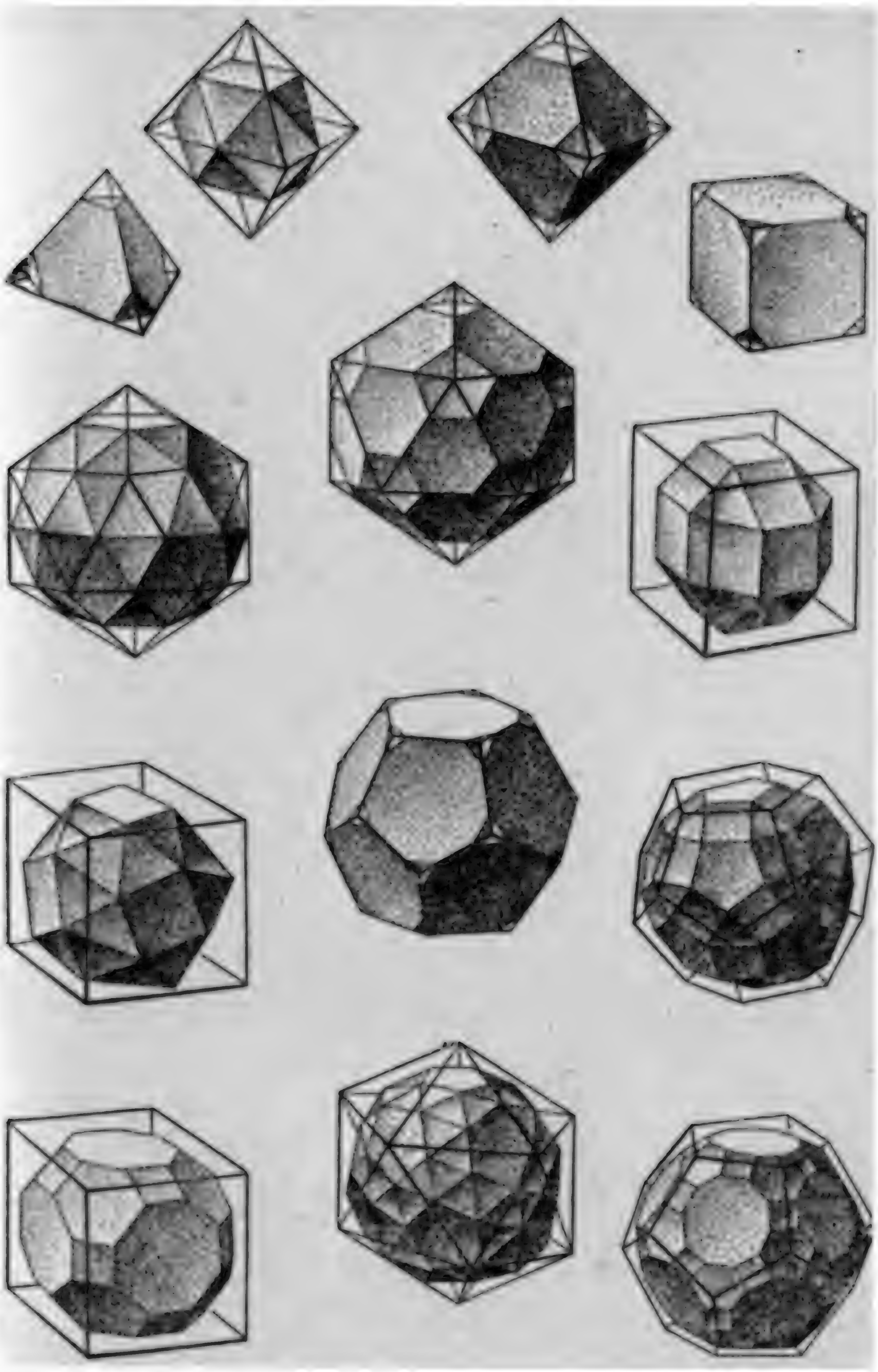


Рис. 44. Полуправильные многогранники («архимедовы тела»).

ограничен неодноименными правильными многоугольниками и в котором равны многогранные углы и одноименные многоугольники, причем в каждой вершине сходится одно и то же число одинаковых граней в одинаковом порядке. Число граней этих тел содержится между 8 и 92 (рис. 44). Каждое из этих тел может быть вписано в сферу. В эпоху Ренессанса возродился интерес и к правильным многогранникам, в частности, в кругах архитекторов и художников. Лука Пачоли под влиянием своего друга Леонардо да Винчи написал сочинение «О божественной пропорции» (1509), в котором рассматривает «золотое сечение» и «архимедовы тела» (рис. 43—45). Альбрехт Дюрер, занимаясь многогранниками, показал, как можно построить из бумаги правильный и полуправильный многогранник, вырезав его развертку поверхности и затем сложив ее по соответствующим ребрам. О правильных телах писали в XVI в. французские ученые О. Финей (Finaeus), П. Рамус и др.

В начале своего научного пути И. Кеплер, для которого правильные многогранники были любимым предметом изучения, сделал мнимое открытие, которое на первых порах принесло ему много славы, но от которого впоследствии пришлось отказаться. «Открытие» это, изложенное Кеплером в первом его крупном сочинении «Mysterium Cosmographicum» (рис. 46) — «Космографическая тайна» (1596), состояло в следующем: вокруг сферы, на поверхности которой движется Меркурий (его орбита принимается за окружность), описывается октаэдр; вокруг октаэдра — сфера, на которой находится Венера; вокруг последней сферы описывается икосаэдр

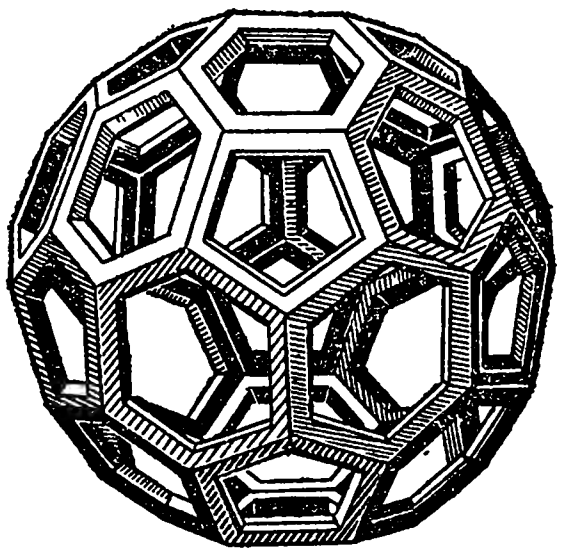


Рис. 45. Полуправильный многогранник, нарисованный Леонардо да Винчи для книги Пачоли «О божественной пропорции».

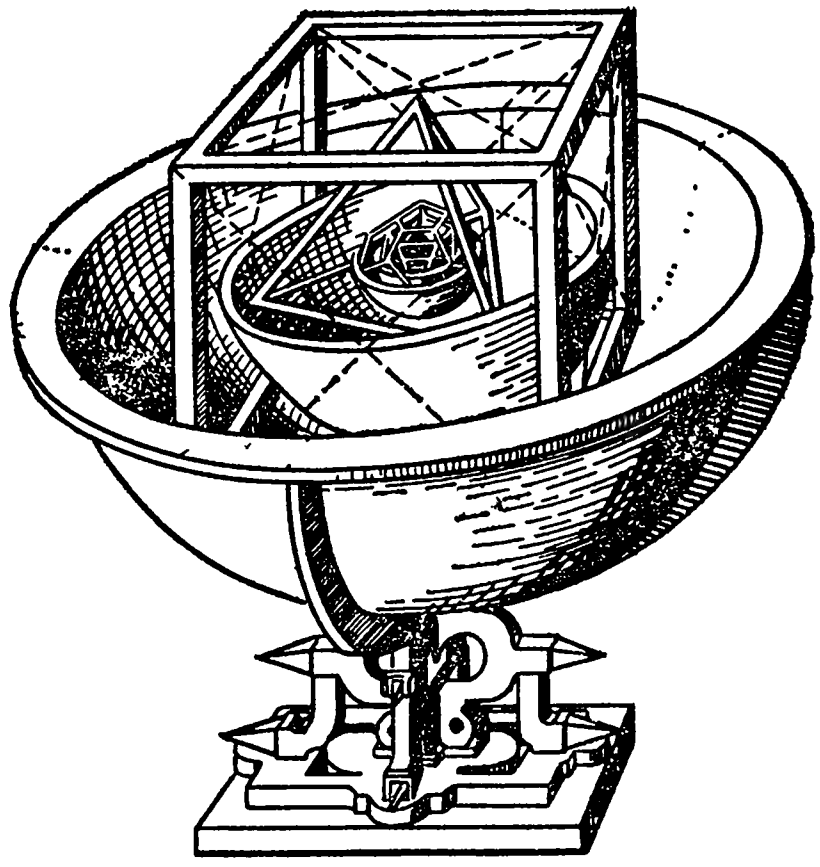


Рис. 46. Модель солнечной системы из «Космографической тайны» (1596) И. Кеплера.

и вокруг него сфера, на которой оказывается Земля; далее идет додекаэдр со сферой, на которой движется Марс; затем описывается тетраэдр на сфере Юпитера, затем следует куб со сферой, на которой находится последняя известная Кеплеру планета — Сатурн.

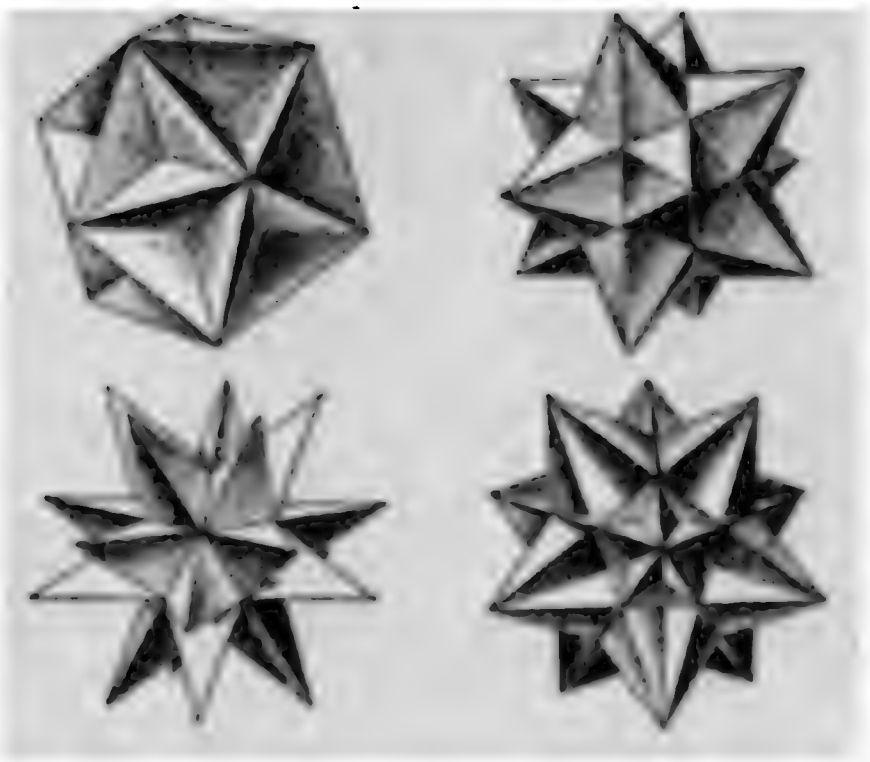


Рис. 47. Правильные невыпуклые многогранники («тела Пуансо»).

Позже, изучив долголетние тщательные наблюдения знаменитого астронома Тихо Браге над движением планеты Марс, Кеплер обнаружил, что Марс движется не по кругу, а по эллипсу, и, критически пересмотрев свои взгляды на движение планет, пришел к «законам Кеплера». В «Космографической тайне», несмотря на ее пифагорейский и средневековый мистицизм, Кеплер, поместив Солнце в центре всех сфер, на которых движутся планеты, проявил себя как приверженец гелиоцентрической системы. Он развил здесь также учение о двух видах выпуклых звездчатых многогранников и обстоятельно изложил теорию архимедовых тел[1].

Доказательство теоремы о единственности пяти правильных многогранников впервые ввел в элементарную геометрию в 1794 г. А. Лежандр. Топологический вывод этого предложения, основанный на теореме Эйлера, впервые изложил в «Анналах Жергонна» (1812—1813) французский математик Люилье.

В начале прошлого столетия французский математик и механик Л. Пуансо (1777—1859), геометрические работы которого относятся к звездчатым многогранникам[2], открыл существование еще двух видов правильных невыпуклых многогранников (рис. 47). Итак, стали известны четыре типа таких фигур. В 1812 г. О. Коши доказал, что других правильных звездчатых многогранников не существует.

---

[1] Существование нового «архимедова тела» открыл Миллер в 1930 г. и независимо от него В. Г. Ашкинузе и Л. Есаулова (см.: Залгаллер В. А. Правильногранные многогранники. — Вестник Ленинградского универсистета, 1963, § 7, с. 5—8). Оба советских математика получили свои результаты независимо друг от друга и от Миллера.

[2] Сведения о правильных звездчатых многогранниках помещены в «Цикле статей по наглядной геометрии». — Успехи математических наук. М.; Л., 1944, вып. X. Среди других там помещены и статьи О. Коши и А. Кэли.

§ 12. ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

Внимательно читая сочинения Архимеда, перестаешь удивляться всем новым открытиям геометров.

Лейбниц

72. Тела и поверхности вращения. Центр тяжести и теоремы Паппа — Гульдина

Понятие тела вращения встречается еще в догреческую эпоху. Понятие же центра тяжести впервые ввел Архимед. Он определил центры тяжести параллелограмма, треугольника и сегмента параболы, изложив свои результаты в произведении, содержащем и знаменитый закон рычага, — «О равновесии плоских фигур, или о центре тяжести плоских фигур».

О центре тяжести фигур писали затем Герон Александрийский, Папп и другие ученые древности. В седьмой книге своего «Математического собрания» Папп приводит без доказательства предложение об объеме тел вращения, известное ныне под названием «теоремы Гульдина»[1].

В эпоху Возрождения архитекторы и ученые внимательно изучали и дальше развивали учение о телах вращения и вопросы, связанные с определением центра тяжести. Так, правильное определение центра тяжести пирамиды дал Леонардо да Винчи. Труды древних в этой области продолжили итальянцы Ф. Мавролико (1494—1575), переводчик и издатель Архимеда, и Ф. Коммандино (1509—1575), переводчик Паппа.

Как известно, в своем труде «О коноидах и сфероидах» Архимед вычисляет объем сегментов параболоида, гиперболоида и эллипсоида вращения[2]. В 1604 г. итальянский ученый Лука Валерио (1552—1618), один из первых и талантливейших последователей Архимеда в новое время, опубликовал свою работу «О центре тяжести тел», в которой определил центры тяжести сегментов и слоев коноидов и сфероидов, вычислил объем шара и установил, что к круглому телу можно приблизиться с помощью вписанных и описанных ступенчатых тел с любой степенью точности.

Задача об определении центра тяжести различных фигур была, как известно, одним из источников первых инфинитезимальных методов в новое время. Таких методов нет еще ни в книге Луки Валерио, ни в опубликованном в 1640 г. труде «Центробарика» (т. е. «Учение о центре тяжести») швейцарского математика П. Гульдина. Они появились лишь у Кавальери и некоторых его современников и последователей.

---

[1] О применении центра тяжести в науке см.: Балк М. Б. Геометрические приложения понятия центра тяжести. М., 1959.

[2] См. гл I; 42.

Именем Гульдина названы следующие две т е о р е м ы о поверхностях и телах вращения, сформулированные еще в III в. Паппом:

1) Если линия L лежит в одной плоскости с осью d и по одну сторону от нее, то площадь поверхности, образованной вращением L вокруг d, равна произведению длины линии l на длину окружности, описанной центром тяжести l.

Пусть l — длина линии L, u — радиус окружности, описанной при полном обороте ее барицентром, т. е. центром тяжести (греческое слово barys — тяжелый). Тогда площадь S поверхности вращения выразится формулой

$$S = 2\pi ul.$$

2) Объем V тела, образованного вращением некоторой плоской фигуры F, площадь которой равна S, вокруг оси, лежащей в плоскости F и не пересекающей ее, выражается формулой

$$V = 2\pi u \cdot S,$$

где u — радиус окружности, описанной при полном обороте центром тяжести фигуры F.

До сих пор нетвердо установлено, каким образом пришел Гульдин к этим предложениям. М. Я. Выгодский считает, что он их взял прямо у Паппа[1]. Четкого математического доказательства этих теорем Гульдин не дал, у него имеются лишь пространные рассуждения метафизического характера. Известно, что Гульдин был одним из наиболее жесточайших противников Кавальери и его метода неделимых. В одном из своих ответов на резкие нападки Гульдина, старавшегося всячески опорочить новые, интеграционные методы Кавальери, последний указывает, что «теоремы Гульдина», которые он сам не смог толком доказать, легко доказываются методом неделимых. И Кавальери показывает, как это делается. Приведенное им доказательство принадлежало одному из его друзей — Антонио Рокка. Идея этого доказательства по существу совпадает с современным выводом соответствующих формул с помощью понятия определенного интеграла.

Пусть имеется тело и поверхность $ABB'A'$ (рис. 48), образованные вращением кривой линии AB, уравнение которого $y = f(x)$, около оси абсцисс. Пусть абсциссы точек A и B соответственно равны a и b. Разбиваем поверхность на пояса плоскостями, параллельными оси Y, и каждый пояс $MNN'M'$ заменяем боковой поверхностью усеченного конуса с такими же основаниями; площадь поверхности усеченного конуса, как известно, равна: $\pi(PM + QN)\widetilde{MN} = \pi(y + y + \Delta y)\Delta S = 2\pi y \cdot \Delta S$, где ΔS — элемент дуги AB. При $\Delta S \to 0$ площадь S боковой поверхности этого тела вращения будет:

---

[1] См.: Ц е й т е н Г. Г. История математики в XVI—XVII вв. М., 1953, с. 248—249.

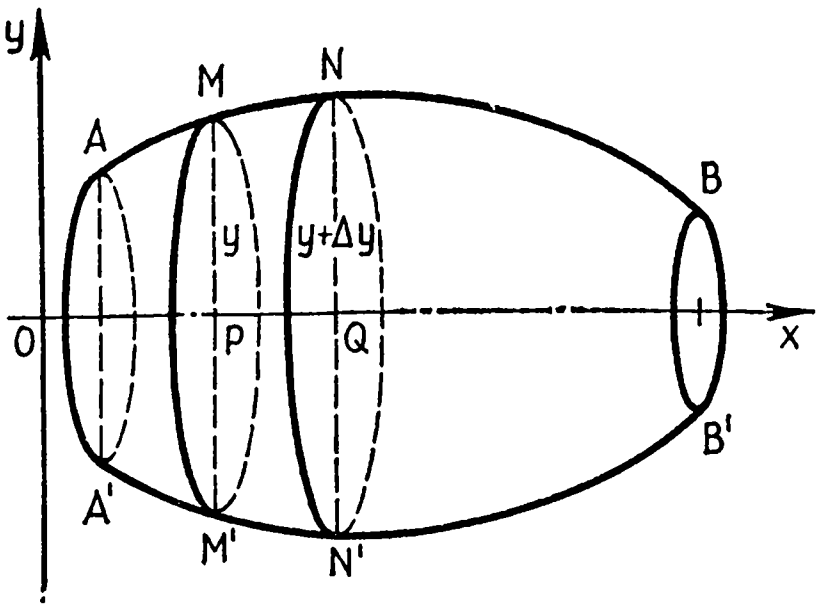


Рис 48.

$$S = \int_a^b 2\pi y \cdot ds, \qquad (1)$$

или

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2}\, dx. \qquad (1')$$

Для получения объема V тела вращения достаточно учесть, что площадь сечения (круга) равна πy^2, объем пояса равен $\pi y^2 \cdot \Delta x$, а объем всего тела выразится определенным интегралом

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx. \qquad (2)$$

73. Цилиндр и цилиндрические поверхности

В XI книге «Начал» Евклид дает определение цилиндра, исходя из вращения прямоугольника около одной его стороны. Однако понятия *цилиндрической поверхности* у него нет; последнее встречается у одного из его комментаторов — Серена из Антинои (Египет), жившего в IV в. Серен трактует и о наклонном цилиндре, в то время как Евклид имеет дело только с прямым круговым цилиндром. Общее понятие цилиндрической поверхности, получаемой движением образующей, пересекающей все точки некоторой направляющей, впервые вводит Б. Кавальери (XVII в.). В «Началах» ничего не говорится о площади боковой поверхности цилиндра, она была найдена Архимедом. В 13-м предложении своего произведения «О шаре и цилиндре» последний доказывает[1], что «поверхность всякого прямого цилиндра, за вычетом оснований, равна кругу, радиус которого есть средняя пропорциональная между стороной (образующей) цилиндра и диаметром его основания», т. е. в современной записи боковая поверхность цилиндра равна $\pi(\sqrt{H \cdot 2r})^2 = 2\pi rH$. Формулы для площади боковой поверхности цилиндра и для объема цилиндра можно получить как частные случаи формул (1′) и (2) предыдущего параграфа. Полагая $b - a = H$, $y = r$ (откуда следует $y' = 0$), получаем:

$$S = \int_a^b 2\pi r dx = 2\pi r (b - a) = 2\pi rH.$$

[1] С доказательством можно ознакомиться по кн.: Архимед. Соч. М., 1962, с. 109—111 и 454—455.

Объем цилиндра выразится формулой

$$V = \int_a^b \pi r^2 dx = \pi r^2 H.$$

74. Конус и конические поверхности

Демокрит из Абдеры находил объем конуса, вероятно, одновременно с установлением объема пирамиды и теми же приемами. Строгое доказательство теорем, служащих для вывода формулы объема конуса и изложенных в пяти предложениях (10—14) XII книги «Начал» Евклида, дал Евдокс Книдский. В первом из них методом исчерпывания доказывается, что объем конуса равен $\frac{1}{3}$ объема цилиндра, имеющего то же основание и ту же высоту. В следующем предложении тем же методом доказывается, что отношение объемов конусов (или цилиндров) с равными высотами равно отношению площадей их оснований. В третьем из упомянутых предложений доказывается, что объемы двух подобных конусов (или цилиндров), т. е. таких, у которых оси и диаметры оснований пропорциональны, относятся как кубы диаметров. Наконец, в последних двух предложениях устанавливается, что отношение объемов двух конусов (или цилиндров), площади оснований которых равны, равно отношению высот. По определению Евклида, конус образуется от вращения прямоугольного треугольника OAB вокруг одного из катетов, скажем OA. Поместим начало координат в вершину O конуса, а за положительное направление оси Ox примем направление оси OA конуса (рис. 49). Обозначив через H и R соответственно высоту и радиус основания конуса, будем иметь:

$$OA = H = x, \quad AB = R = y,$$

откуда

$$yH = xR, \text{ или } y = \frac{R}{H} x,$$

соотношение, которое может рассматриваться вообще как уравнение вращающейся линии OB.

Согласно формуле (2) пункта 72 для объема V конуса получим:

$$V = \int_0^H \pi y^2 dx = \int_0^H \pi \left(\frac{R}{H} x\right)^2 dx =$$

$$= \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

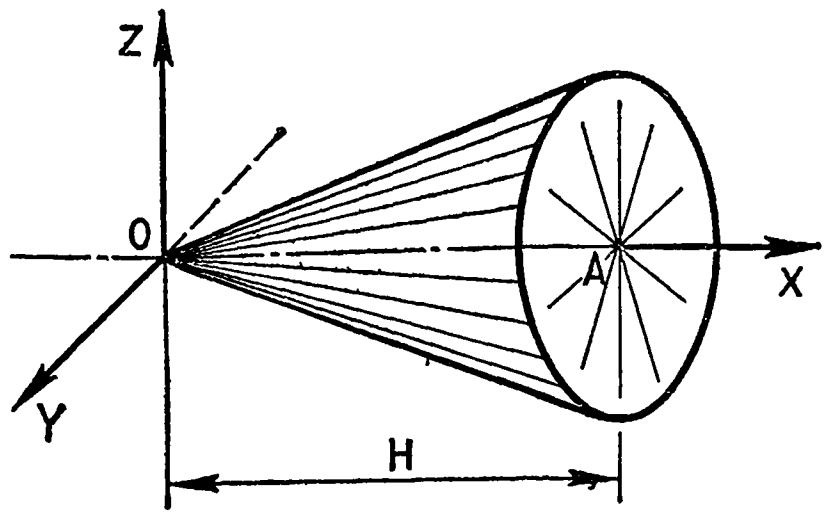


Рис. 49.

У Евклида нет понятия *конической поверхности*, оно было введено Аполлонием в его «Конических сечениях», при этом он имел в виду обе полости конуса Вот что пишет Аполлоний: «Если от какой-либо точки окружности круга, который не находится в одной плоскости с некоторой точкой, проводить прямые, соединяющие эту точку с окружностью, и при неподвижности точки перемещать прямую по окружности, возвращая ее туда, откуда началось движение, то поверхность, описанную прямой и составленную из двух поверхностей, лежащих в вершине друг против друга, из которых каждая бесконечно увеличивается, если бесконечно продолжать описывающую прямую, я называю *конической поверхностью*, неподвижную же точку — ее *вершиной*, а *осью* — прямую, проведенную через эту точку и центр круга». Определение конической поверхности Аполлония воспроизведено в современных школьных учебниках с существенной заменой круга на любую линию, так называемую направляющую.

В «Началах» Евклида мы находим определение только объемов цилиндра и конуса, площадь же их боковых поверхностей была найдена Архимедом. В 14-м предложении его произведения «О шаре и цилиндре» он доказывает следующую теорему: «Поверхность всякого равнобедренного (т. е. прямого кругового) конуса, за вычетом основания, равна кругу, радиус которого есть средняя пропорциональная между стороной (т. е. образующей) конуса и радиусом круга, являющегося основанием конуса». Площадь S боковой поверхности дается таким образом (в современных символах) формулой

$$S = \pi \left(\sqrt{lr}\right)^2 = \pi r l,$$

где l — длина образующей, r — радиус основания конуса. «Равнобедренным» прямой круговой конус называется потому, что он имел в осевом сечении равнобедренный треугольник.

В XVI предложении Архимед выводит формулу для площади боковой поверхности усеченного конуса, которую можно записать по-современному так:

$$S = \pi \left(\sqrt{l\,(r + R)}\right)^2 = \pi l\,(r + R). \qquad (1)$$

Ныне применяется и другой вид формулы (1), получаемый введением радиуса ρ, равного среднему арифметическому радиусов оснований конусов, т. е. $\rho = \dfrac{R + r}{2}$; тогда из формулы (1) получаем:

$$S = 2\pi\rho l. \qquad (2)$$

75. Об одной древнеегипетской криволинейной поверхности

Десятая задача Московского папируса представляет собой древнейший в истории пример вычисления площади кривой по-

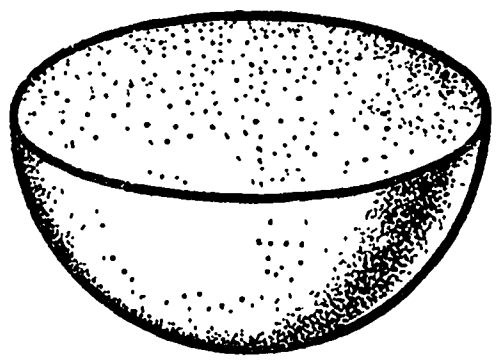


Рис. 50. По Струве.

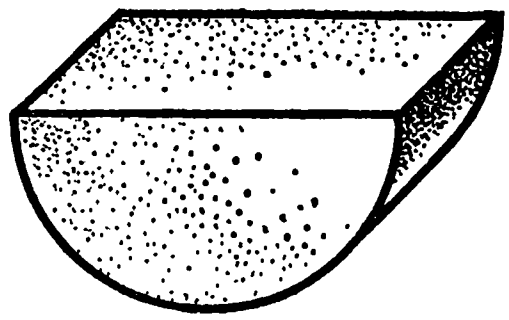


Рис. 51. По Питу.

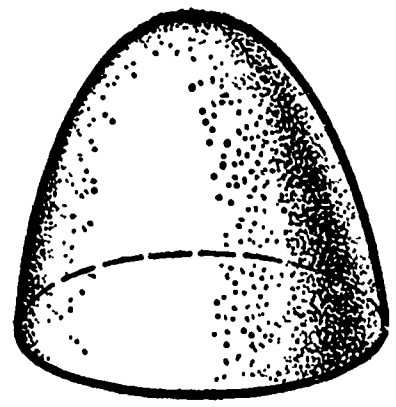


Рис. 52. По Нейгебауэру.

верхности. О какой именно поверхности там идет речь, до сих пор точно не установлено. Согласно утверждению академика В. В. Струве, расшифровавшему и издавшему в 1930 г. Московский папирус, речь идет о «корзине», обозначаемой символом и являющейся полусферой (рис. 50). Текст упомянутой задачи сохранился, однако не целиком, кое-где слова стерты. Другие исследователи, в том числе Т. Э. Пит (Peet), считают, что речь идет о полуцилиндре (рис. 51); наконец, для О. Нейгебауэра «корзинка», о которой идет речь, не что иное, как один из куполообразных амбаров (рис. 52), которые строили египтяне для практических нужд. При этом соответствующие вычисления, изложенные в папирусе, приближенные. Это истолкование считается ныне самым вероятным.

76. Шар и сферическая поверхность у Евклида и Архимеда

В «Началах» Евклида (XII книга) шару и его поверхности уделяется сравнительно мало внимания. Если не считать определения, то о шаре говорится лишь в XVII и XVIII предложениях. В первом из них решается такая задача: «При наличии двух сфер около того же самого центра вписать в большую сферу многогранное тело, не касающееся поверхности меньшей сферы». В ходе решения этой задачи Евклид пользуется теоремой (им полностью нигде не доказанной) о том, что любое плоское сечение шара представляет собой круг. Если же секущая плоскость проходит через центр шара, то круг этот наибольший, т. е. по существу вводится понятие большого круга. В XVIII предложении методом исчерпывания доказывается, что объемы двух шаров относятся как кубы их радиусов. Ни площади поверхности шара, ни объема последнего Евклид не вычисляет, вероятно, он их и не знал. Архимед первый открыл соответствующие формулы. В своем трактате «О шаре и цилиндре» (в 33-м и 34-м предложениях первой его книги) Архимед дает строгое доказательство этих формул. Однако о том, как он пришел к своему открытию, можно судить по изложенному им в «Эфоде» так называемому «меха-

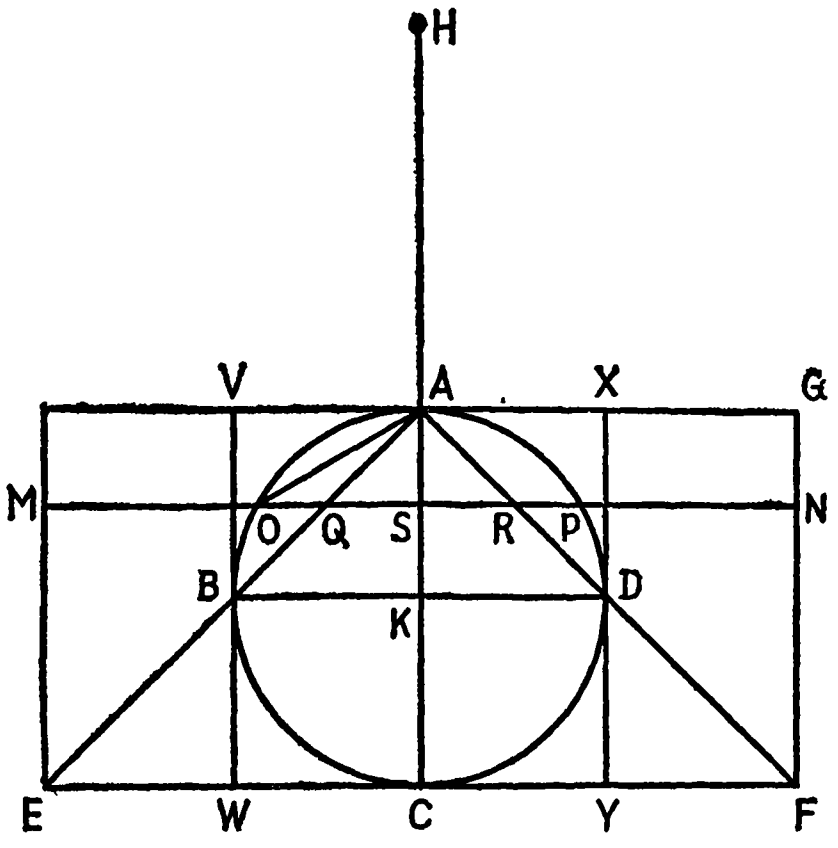


Рис. 53.

ническому» доказательству, при котором масса тела, как бы помещенная вся в одном конце равноплечего рычага, уравновешивается массами, распределенными вдоль другого плеча. Вот как применил этот принцип Архимед для доказательства следующих двух предложений[1]:

«1. Каждый шар в четыре раза больше конуса, основание которого равно большому кругу шара, а высота — радиусу последнего; и

2. Цилиндр, основание которого равно большому кругу шара, а высота — диаметру последнего, в полтора раза больше шара».

1) Пусть $ABCD$ будет большой круг шара и два взаимно перпендикулярных диаметра (рис. 53).

На BD как на диаметре опишем круг в плоскости, перпендикулярной AC, и на этом круге как на основании построим конус с вершиной A. Продолжим боковую поверхность этого конуса до пересечения с плоскостью, проведенной через C параллельно его основанию; сечение будет кругом с диаметром EF.

На этом круге как на основании построим цилиндр, высота и ось которого будет AC; продолжим CA до H так, чтобы AH было равно CA.

Будем рассматривать CH как равноплечий рычаг; A будет его серединой.

В плоскости круга $ABCD$ проведем какую-нибудь прямую MN, параллельную BD. Пусть она пересечет окружность в O, P, диаметр AC — в S и прямые AE, AF — в Q, R. Соединим A с O.

Проведем через MN перпендикулярную AC плоскость. Эта плоскость пересекает цилиндр по кругу с диаметром MN, шар — по кругу с диаметром OP и конус — по кругу с диаметром QR.

Так как $MS = AC$ и $QS = AS$, то следует:

$$MS \cdot SQ = CA \cdot AS = AO^2 = OS^2 + SQ^2.$$

И так как $HA = AC$, то получается:

$$\frac{HA}{AS} = \frac{CA}{AS} = \frac{MS}{SQ} = \frac{MS^2}{MS \cdot SQ} = \frac{MS^2}{OS^2 + SQ^2},$$

что согласно стоящему выше равно

---

[1] См.: Евклид. Начала. М.; Л., 1950, кн. XI—XV, с. 278—280.

$$\frac{MN^2}{OP^2 + QR^2} = \frac{\text{круг с диам. } MN}{\text{круг с диам. } OP + \text{круг с диам. } QR}.$$

Это значит:

$$\frac{HA}{AS} = \frac{\text{круговое сечение цилиндра}}{\text{круг сеч. шара} + \text{круг. сеч. конуса}}.$$

Поэтому круговое сечение цилиндра в занимаемом им положении будет в равновесии с круговым сечением шара вместе с круговым сечением конуса, если оба последних круга будут перенесены с их центрами тяжести в H.

То же самое имеет место для трех соответствующих сечений плоскостью, которая будет перпендикулярна AC и проходит через любую другую прямую, находящуюся в параллелограмме EG и параллельную EF.

Если мы таким же образом рассмотрим все группы по три круга, по которым плоскости, перпендикулярные AC, пересекают цилиндр, шар и конус и в которых складываются эти три тела, то следует, что цилиндр в занимаемом им положении будет относительно A в равновесии с вместе взятым шаром и конусом, если последние перенесены центрами своей тяжести в H.

Так как K есть центр тяжести цилиндра, то, следовательно,

$$\frac{HA}{AK} = \frac{\text{цилиндр}}{\text{шар} + \text{конус } AEF}.$$

Но HA равно $2AK$; следовательно,

$$\text{цилиндр} = 2\ (\text{шар} + \text{конус } AEF).$$

Но

$$\text{цилиндр} = 3 \text{ конусам } AEF \text{ (Евклид, XII, 10)}.$$

Следовательно,

$$\text{конус } AEF = 2 \text{ шарам}.$$

Но так как $EF = 2BD$, то будет:

$$\text{конус } AEF = 8 \text{ конусам } ABD.$$

Следовательно,

$$\text{шар} = 4 \text{ конусам } ABD.$$

2) Через B, D проведем VBW, XDY параллельно AC и представим себе цилиндр, имеющий осью AC, а основаниями круги с диаметрами VX, WY.

В таком случае будет: цилиндр $VY = 2$ цилиндрам, $VD = 6$ конусам, $ABD = \frac{3}{2}$ шара согласно доказанному выше. Это и требовалось доказать.

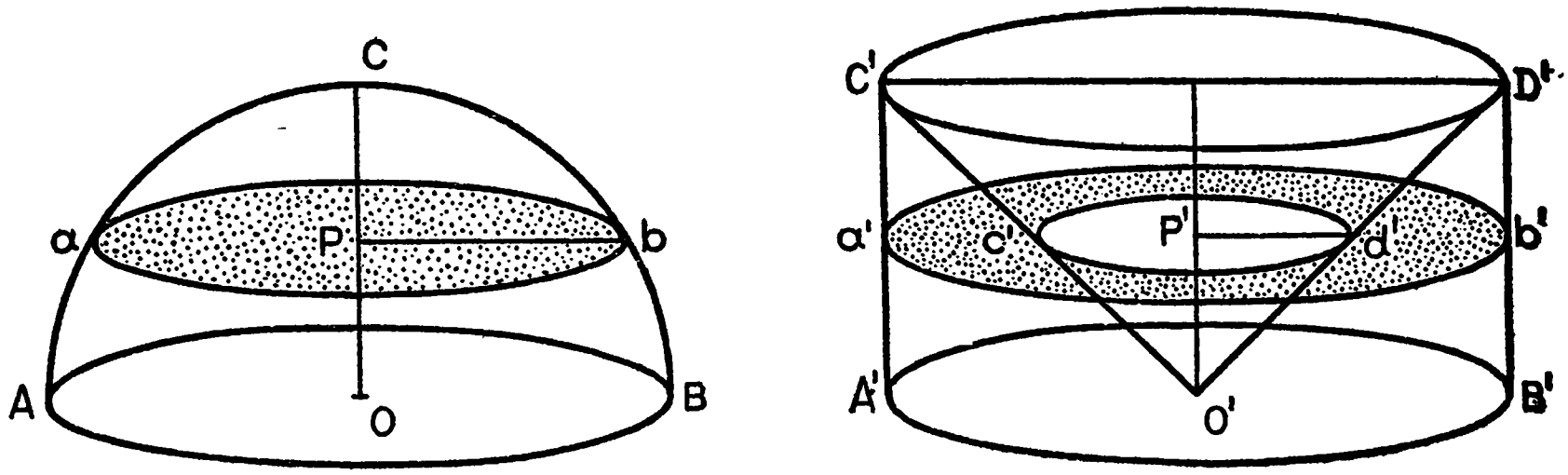


Рис. 54.

При помощи теоремы, что шар в четыре раза больше конуса, основание которого равно большому кругу, а высота — радиусу шара, я получил тот результат, что поверхность шара будет в четыре раза больше его большого круга; действительно, исходя из того обстоятельства, что каждый круг равен треугольнику, основание которого есть периметр, а высота — радиус круга, я подумал, что таким же образом и каждый шар будет равен конусу, основание которого равно поверхности шара, а высота равна радиусу».

77. Объем шара и принцип Кавальери

Видный советский ученый, историк математики, профессор Д. Д. Мордухай-Болтовский (1876—1952), которому принадлежит самый совершенный русский перевод «Начал» Евклида с обстоятельными комментариями, дал интересный вывод формулы объема шара на основе принципа Кавальери.

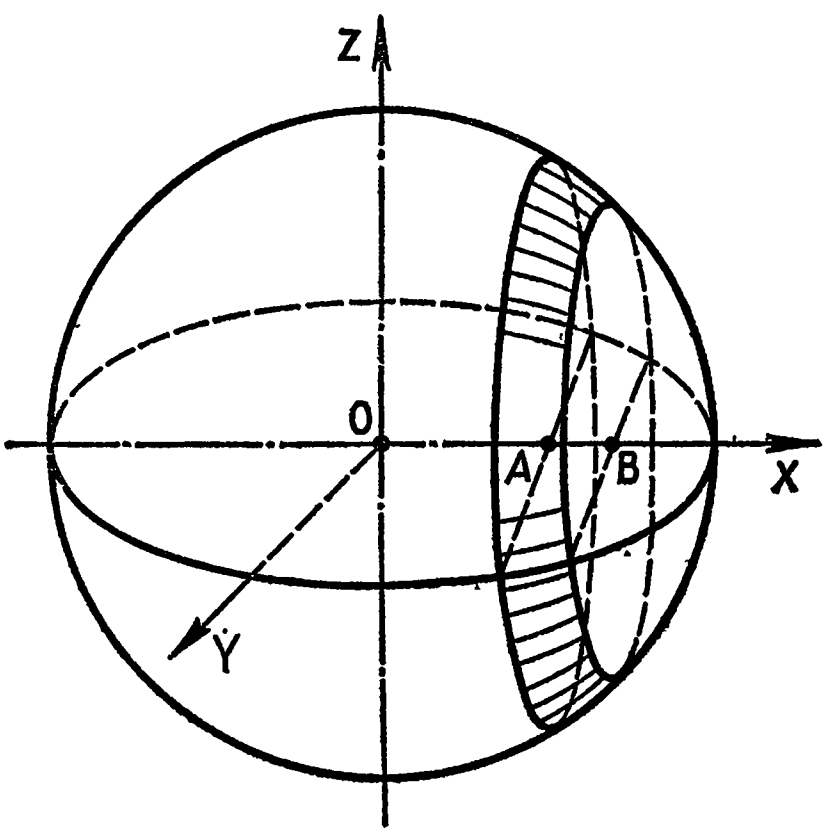


Рис. 55.

Вот это доказательство.

Поместим между двумя параллельными плоскостями полусферу ABC и цилиндр $A'B'C'D'$ (рис. 54) с основанием того же радиуса R, что и шар, и с высотой, равной радиусу, с входящим в него конусом $C'D'O'$, который имеет своим основанием верхнее основание цилиндра, а вершиной — центр нижнего основания.

На основании принципа Кавальери мы вправе сделать заключение, что объем шара равен объему тела, получаемого выре-

зыванием конуса из цилиндра. В самом деле, легко видеть, что круг ab, полученный в сечении сферы плоскостью $aba'b' \parallel ABA'B'$, равновелик с кольцом $a'c'd'b'$, получаемым в сечении вышеуказанного тела той же самой плоскостью. Действительно, на основании теоремы Пифагора в полусфере

$$Pb = r = \sqrt{R^2 - h^2}, \text{ где } h = OP,$$

и, следовательно, площадь сечения ab равна

$$S = \pi (R^2 - h^2);$$

с другой стороны, площадь круга $a'b'$

$$S' = \pi R^2,$$

а так как, очевидно, радиус круга $c'd'$ равен h, то площадь круга $c'd'$

$$S'' = \pi h^2.$$

Следовательно, площадь кольца $a'c'd'b'$ равна

$$S' - S'' = \pi (R^2 - h^2) = S.$$

Замечая далее, что объем цилиндра равен $\pi R^2 \cdot R = \pi R^3$, а объем конуса $\pi R^2 \cdot \frac{1}{3} R = \frac{1}{3} \pi R^3$, мы получаем для объема полусферы величину $\frac{2}{3} \pi R^3$, а для объема всей сферы

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Для нахождения объема V шара с помощью определенного интеграла можно применить формулу (2), пункт 72. Поместив начало координат в центр вращающегося около неподвижной прямой, совпадающей с осью X, полукруга радиуса R, как показано на рисунке 55, заметим, что уравнение вращающейся линии можно представить так: $y^2 + x^2 = R^2$, откуда $y^2 = R^2 - x^2$. Итак,

$$V = 2 \int_0^R \pi y^2 dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)\, dx = 2\pi \left(R^2 \int_0^R dx - \right.$$

$$\left. - \int_0^R x^2 dx \right) = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Для площади S поверхности сферы согласно формуле (1′) § 26, учитывая, что из $y^2 = R^2 - x^2$ получаем при дифференцировании $2yy' = -2x$, или $y' = \frac{x}{y}$, имеем:

$$S = 2\int_0^R 2\pi y \sqrt{1-(y')^2}\,dx =$$

$$= 2\int_0^R 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\int_0^R 2\pi y \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}\,dx =$$

$$= 2\int_0^R 2\pi R\,dx = 4\pi R^2.$$

II

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ НА ВНЕКЛАССНЫХ ЗАНЯТИЯХ

...По мере возникновения новых задач познания природы само содержание математики не может оставаться неизменным. Оно, подобно живому организму, развивалось и развивается: на математическом древе появляются новые ветви, вырастают новые корни.

Б. В. Гнеденко

Глава V.

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

§ 13. О РАЗВИТИИ СОВРЕМЕННОЙ АЛГЕБРЫ

Подчинить вычисления своей воле, сгруппировать математические операции, научиться их классифицировать по степени трудности, а не по внешним признакам — вот это задачи математиков будущего, так, как я их понимаю, вот путь, по которому я хочу пойти...

Галуа

1. О понятии группы. Эварист Галуа

Эварист Галуа действительно открыл новые большие пути в математике, несмотря на то что его жизненный путь был чрезвычайно коротким: он умер в двадцатилетнем возрасте[1]. Имя Галуа как одного из творцов современной математики тесно связано с понятием группы, с созданием теории групп и так называемой «теории Галуа».

Эта теория возникла из рассмотрения групп алгебраических преобразований при поисках решения в радикалах общих алгебраических уравнений степени выше 4-й. В известном смысле предшественниками Э. Галуа были Лагранж, П. Руффини и Н. Абель. Однако фундаментальные результаты в этой области получены были в 1830—1832 гг. именно Э. Галуа. Отсюда и название «теория Галуа». Галуа ввел по существу такие основные понятия, как «группа», «подгруппа», «нормальный делитель» и «поле». Он впервые ввел и термин «группа». Многие основные результаты своей теории Галуа получил еще в возрасте 16—18 лет и дважды представлял их в Парижскую Академию наук, однако даже крупнейшие французские математики того времени — Коши, Фурье, Пуассон — не сумели разобраться в работах Галуа и оценить их значение. Как республиканец и активнейший член общества «Друзей народа», Галуа публично выступал против королевского режима, за что подвергался гонениям и был дважды приговорен к тюремному заключению. По выходе из тюрьмы он был убит на дуэли, по-видимому, спровоцированной монархистами. Перед трагической смертью он написал письмо другу, в котором сжато изложил свои основные открытия. Работы Галуа были, однако, разобраны и опуб-

---

[1] Для ознакомления с биографией Галуа и с элементами теории групп рекомендуем следующие книги: 1) Инфельд Л. Эварист Галуа. М., 1958; 2) Дальма А. Э. Галуа — революционер и математик. М., 1960.

ликованы французским математиком Жозефом Лиувиллем лишь в 1846 г.

Широкое распространение и применение идей Э. Галуа началось только после опубликования объемистого труда известного французского математика Камилла Жордана — «Трактата о подстановках и алгебраических уравнениях» (1870), фактически явившегося, по словам самого автора, лишь пространным комментарием к трудам Галуа. Благодаря этой книге Жордана идеями теории групп увлеклись два молодых в то время одаренных математика — норвежец Софус Ли и немец Феликс Клейн. Первый применил идеи Галуа в теории дифференциальных уравнений (группы Ли), второй — в геометрии[1] (Эрлангенская программа). Во второй половине прошлого века теория групп развилась главным образом как теория групп преобразований. Со временем, однако, выяснилось, что и к другим объектам можно применить понятия и теоремы теории групп преобразований. Так возникла *абстрактная*, или *общая, теория* групп. В этой теории не рассматриваются объекты, над которыми производятся операции, ни существо этих операций, а исследуются лишь законы самих операций. Вот почему в настоящее время мы говорим, что произвольное множество G вместе с определенной на нем операцией $*$ называется группой относительно этой операции, если выполняются следующие *групповые аксиомы*:

1) Произведение любых двух элементов какого-либо множества принадлежит тому же множеству.

2) Для любых трех элементов a, b, c из G имеет место ассоциативный закон, т. е.

$$a*(b*c)=(a*b)*c.$$

3) В множестве G существует нейтральный элемент e, для которого при любом элементе $a \in G$ имеет место:

$$a*e=e*a=a.$$

4) Для каждого элемента $a \in G$ существует в G обратный элемент a^{-1}, такой, что

$$a*a^{-1}=a^{-1}*a=e.$$

Если для любых двух элементов a и b множества G имеет место $a*b=b*a$, то группа называется *коммутативной* или *абелевой*, по имени молодого норвежского математика Абеля, открывшего значение таких групп для решения в радикалах алгебраических уравнений. Абстрактная теория групп позволяет рассматривать с единых позиций различные множества операций, тождественные с абстрактной точки зрения. Две группы, тождественные с абстрактной точки зрения, называются *изоморфными*, т. е. одного вида (от греческих слов «изос» — равно и «морфе» — вид, форма).

---

[1] От С. Ли берет свое начало термин «подгруппа».

Э. Нетер

Так, например, группа перестановок двух электронов изоморфна, т. е. тождественна с абстрактной точки зрения группе осевых симметричных отражений плоскости.

В настоящее время идеи и методы теории групп применяются в различных областях естествознания, например в кристаллографии и в квантовой механике. Большой вклад в развитие теории Галуа, теории групп и ее приложений внесли Д. А. Граве, Н. Г. Чеботарев, О. Ю. Шмидт, Л. С. Понтрягин, А. Г. Курош, А. И. Мальцев и другие советские математики. Крупный русский кристаллограф, минералог и геометр академик Евграф Степанович Федоров (1853—1919) применил теорию групп к исследованию кристаллов.

2. О понятиях кольца и поля. Абстрактная алгебра

Исследования Галуа, развитие теории групп во второй половине прошлого столетия, создание теории множеств и аксиоматического[1] метода привели ученых XX в. к новой точке зрения на предмет и задачи алгебры. Не решение уравнений, а *изучение алгебраических операций*, производимых над элементами произвольной природы, становится главным объектом современной алгебры. Это постепенное преобразование алгебры как науки стало вполне ясным уже в 20-х годах нашего века в трудах одной из талантливейших женщин мира — Эмми Нетер[2] (1882—1935). Благодаря предшествовавшим до нее исследованиям и основному свойству ее математического дарования — стремлению к общим постановкам и формулировкам математических проблем — она начиная с 1920 г. заложила фундамент создания нового направления в алгебре, так называемой *абстрактной* или *общей алгебры*, т. е. общей теории колец, полей и идеалов. Работы Э. Нетер были продолжены Э. Штейницем, А. Артином и его учеником Б. Ван дер Варденом, автором двухтомного труда «Современная алгебра» (1930—1931)[3].

В арифметике и алгебре оперируют с разными числами: целыми, рациональными, иррациональными, комплексными, с многочленами и алгебраическими дробями; при этом часто констатируют,

---

[1] Об аксиоматическом методе см. гл. II, § 4.

[2] См.: Александров П. С. Памяти Э. Нетер. — В кн.: Успехи математических наук, 1936, вып. II; его же. Эмми Нетер. — МШ, 1965, № 2.

[3] Б. Ван дер Варден написал также ряд важных трудов по истории математики.

что свойства производимых над разными этими объектами действий в основном одни и те же. Отсюда стремление объединить все эти виды объектов каким-то общим абстрактным определением и установить общие свойства операций над ними. Так и возникло одно из основных понятий абстрактной алгебры — *кольцо*. Под кольцом понимают конечное или бесконечное множество R элементов a, b, c, ..., в котором определены две алгебраические операции, называемые *сложением* и *умножением*. Каждая из этих операций ставит в соответствие любой упорядоченной паре элементов a, b множества R некоторый третий элемент c того же множества.

Причем должны выполняться следующие у с л о в и я:

1) Коммутативность сложения: $a + b = b + a$.

2) Ассоциативность сложения: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

3) Существование решения x для уравнения $a + x = b$, иными словами, *обратимость сложения*.

4) Коммутативность умножения: $ab = ba$.

5) Ассоциативность умножения: $a(bc) = (ab)c$

6) Дистрибутивность умножения относительно сложения: $(a + b)c = ac + bc$.

Кольцо, в котором имеют место аксиомы 4 и 5, называется *ассоциативно-коммутативным*. В кольце может отсутствовать ассоциативность умножения (неассоциативные кольца) и коммутативность умножения (некоммутативные кольца).

Множество целых чисел и множество многочленов представляют собой кольца, не имеющие делителей нуля; они называются *областями целостности*. Другими примерами числовых колец могут служить множества рациональных чисел, действительных чисел, комплексных чисел, четных чисел, чисел вида $a + b\sqrt{2}$ с целыми a и b и др. Множество натуральных чисел не является кольцом, так как в нем уравнение $a + x = b$ не имеет решения при $a > b$, по этой же причине и множество положительных рациональных чисел не есть кольцо. Легко усмотреть, что относительно операции сложения R есть абелева группа, поэтому в кольце существует, притом только один, «нейтральный элемент» — *нуль*, такой, что $a + 0 = a$ для любого a.

Обратимость операции умножения приводит к понятию частного случая кольца — *поля*[1]. Это кольцо P, удовлетворяющее, кроме выше перечисленных, еще и следующим аксиомам:

7) Существование (по крайней мере одного) решения уравнения $ax = b$ при любых двух элементах кольца b и $a \neq 0$, т. е. обратимость умножения.

8) P содержит по крайней мере один элемент, отличный от нуля. Поле образует группу относительно умножения и, таким образом, в частности, всегда обладает единицей, т. е. элементом e, таким, что

---

[1] По предложению А. Г. Куроша в советской алгебраической литературе два термина «поле» и «тело» упорядочили: коммутативное тело стали называть *полем*, а некоммутативное поле — *телом*.

для любого элемента $a \neq 0$ имеет место $ae = a$. Можно доказать, что в поле не существует делителей нуля, поэтому всякое поле является областью целостности.

3. От множества натуральных чисел к множеству комплексных чисел. Путь формально-логического расширения понятия числа

Мы уже знаем, как на основе натуральных чисел исторически возникли и развивались дробные, иррациональные, отрицательные и комплексные числа. Целые (положительные и отрицательные) числа, также действительные и комплексные числа получили теоретическое обоснование лишь в XIX в. При формально-логическом расширении понятия о числе множество натуральных чисел тоже служит фундаментом для дедуктивного построения других числовых множеств. Отступая от исторического пути развития, отрицательные (вообще целые) числа трактуются при этом раньше дробных. (рациональных). Формально-логическое расширение и теоретическое обоснование понятия числа было подготовлено трудами выдающихся математиков XIX в., среди которых были Дж. Пикок, У. Гамильтон, А. де Морган в Англии и М. Ом, Г. Грассман, Г. Ганкель в Германии. Это обоснование было продолжено во второй половине XIX в. и в первой четверти XX в. после создания теории множеств, применения аксиоматического метода и формирования абстрактной алгебры. При расширении понятия числа соблюдаются следующие т р е б о в а н и я:

1) Расширенное множество P' должно содержать исходное расширяемое множество P как одно из своих подмножеств. Так, если обозначить через N множество натуральных чисел, через C кольцо целых чисел, через R поле рациональных чисел, через B поле вещественных чисел, через K поле комплексных чисел, мы должны иметь:

$$K \supset B \supset R \supset C \supset N.$$

2) Операции и отношения расширяемого множества P определены также и для расширенного множества P', причем их смысл в P' должен совпадать со смыслом, который они имели в P до его расширения.

3) В P' должна быть выполнима операция, которая невыполнима (или *не всегда выполнима*) в P.

4) Расширение P' должно быть минимальным из всевозможных расширений P, удовлетворяющих требованиям 1—3.

Второе из этих требований известно под названием «принцип перманентности» и в четком виде было высказано Г. Ганкелем в его книге «Теория комплексных числовых систем» (1867)[1]. Третье из перечисленных требований прямо подсказано историческим пу-

[1] Имеется русский перевод. Казань, 1912.

тем эволюции понятия числа. Так, появление отрицательных чисел (построение целых чисел) возникло из необходимости выполнять действия вычитания, не всегда возможного в множестве натуральных чисел. Аналогично деление не всегда возможно в множестве целых чисел, отсюда последовало его расширение до множества рациональных чисел. В поле рациональных чисел, не обладающих непрерывностью, не всегда возможны извлечение корня из положительного числа, операция предельного перехода, отсюда — расширение, ведущее к полю вещественных чисел. Наконец, извлечение корня из отрицательных чисел исторически обусловило расширение поля вещественных чисел до поля комплексных чисел.

О способе построения целых, рациональных и комплексных чисел, в основе которого лежит понятие «пара чисел», писал У. Р. Гамильтон в своих «Лекциях о кватернионах» (1853). О том, что при соблюдении вышеуказанных четырех требований после построения поля комплексных чисел (путем расширения поля действительных чисел, к которому приобщается элемент i, так что $i^2 = -1$) дальнейшее расширение понятия числа оказывается невозможным[1].

Коротко это выражают словами: комплексные числа образуют алгебраически замкнутое поле. Предел расширения числовых полей вытекает из соответствующей теоремы немецкого математика Ф. Г. Фробениуса (1849—1917), доказанной им в 1878 г. в работе «О линейных подстановках и билинейных формах».

§ 14. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ

Подобно тому, как всю область действительных величин можно представить с помощью бесконечной прямой, можно себе представить область всех величин, действительных и мнимых, с помощью бесконечной плоскости, где каждая точка, определенная своей абсциссой a и своей ординатой b, представляет в то же время величину $a + ib$.

Гаусс

4. Происхождение понятия комплексного числа. Его развитие в XVI—XVII вв.

Говоря об эволюции понятия числа, мы отмечали, что не всегда первым толчком к расширению понятия числа были непосредственные практические потребности людей в узком смысле слова. Комплексные числа, как и отрицательные, возникли из внутреннего развития математической науки, из практики решения алгебраических уравнений.

---

[1] См. ниже, ч. II; 6.

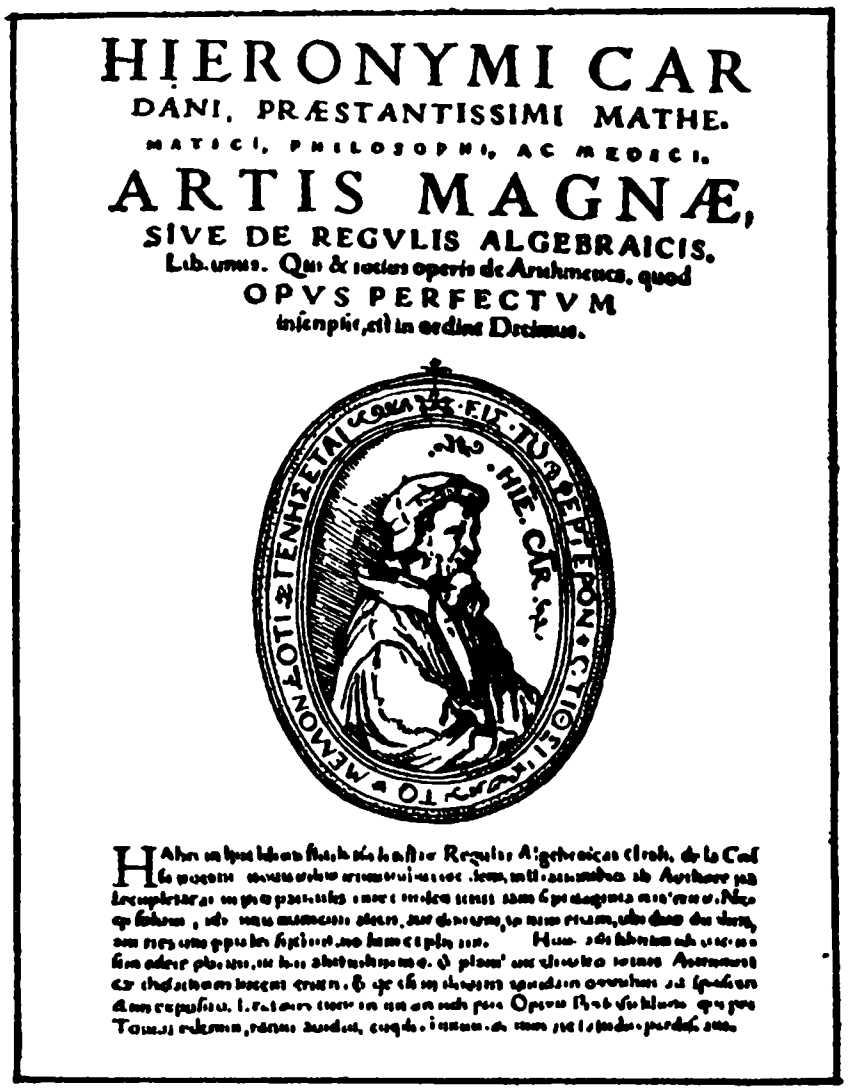

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE.
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI.
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS.
Lib. unus. Qui & ultimus operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, sit in ordine Decimus.

Рис. 56. Титульный лист «Большого искусства» Кардано с его портретом.

Уже при решении квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a, b, c — вещественные числа, его корни

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

могут не быть действительными, они будут комплексными при $b^2 - 4ac < 0$. Если ограничиться только вещественными числами, следует признать бесчисленное множество квадратных уравнений, вроде $x^2 + 1 = 0$; $2x^2 + x + 1 = 0$ и т. д., неразрешимыми. Это значительно осложнило бы теорию не только алгебраических уравнений, но и многих других важнейших математических понятий. Еще более настойчиво, как увидим ниже, эта проблема выдвигается при решении уравнений выше 2-й степени. Эти причины, вызванные развитием алгебры, потребовали расширения понятия о числе. Однако процесс этого расширения не был кратким: он длился около трех столетий, на протяжении которых в борьбе мнений и взглядов складывалось, развивалось и получило общее признание понятие комплексного числа.

Квадратные уравнения решали еще древние вавилоняне и греки, но у них отсутствовало понятие отдельно взятого отрицательного числа. С комплексными числами впервые встретились именно при решении квадратных уравнений индийские ученые, имевшие понятие о квадратном корне и об отрицательном числе.

Однако они считали, что квадратные корни из отрицательных чисел не существуют, ибо отрицательные числа не могут быть квадратами вещественных чисел[1], с которыми они привыкли производить разнообразные операции. Поэтому квадратные уравнения с невещественными корнями математики Индии считали вообще не имеющими решений, их просто не брали во внимание. Так же поступали до XVI в. и ученые других стран, которые, не находя конкретного истолкования для комплексных корней, объявляли их ложными. В настоящее время ученик с самого начала изучения

[1] См.: Молодший В. Н. Основы учения о числе в XVIII и начале XIX в. М., 1963, с. 159.

комплексных чисел узнает, что их можно представить в виде векторов или *точек на плоскости*. Однако до этой идеи, сколь простой бы она нам ни казалась, ученые дошли лишь в XIX в.

В XVI в. итальянские математики внесли крупный вклад в развитие алгебры: они решили в радикалах уравнения 3-й и 4-й степени. В опубликованном в 1545 г. произведении Кардано «Великое искусство»[1] (рис. 56) содержалось алгебраическое решение кубического уравнения

$$x^3 + px + q = 0 \tag{1}$$

по формуле

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \tag{2}$$

или короче $x = u + v$, где

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

$$uv = -\frac{p}{3}.$$

Это «формула Кардано».

В алгебре[2] доказывается, что существует три корня уравнения (1), а именно:

1) При $\Delta = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} > 0$ получим один действительный и два комплексных сопряженных корня; например, уравнение $x^3 + 15x + 124 = 0$, для которого $\Delta > 0$, имеет корни: $x_1 = -4$, $x_{2,3} = 2 \pm 3i\sqrt{3}$. Проверьте!

2) При $\Delta = 0$, $p \neq 0$, $q \neq 0$ уравнение имеет три действительных корня, два из которых совпадают; например, корнями уравнения $x^3 - 12x + 16 = 0$ будут: $x_1 = -4$, $x_{2,3} = 2$. Проверьте!

3) При $\Delta < 0$ мы имеем самый интересный для нас, так называемый «неприводимый» случай, когда приходится извлекать ко-

---

[1] Так называли в то время алгебру в отличие от арифметики — «малого искусства».

[2] См., например: Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., 1959, с. 234—239

рень 3-й степени из комплексных чисел и комплексными оказываются сами кубические корни u, v. Все же именно в данном случае уравнение (1) имеет три действительных различных корня. Например, уравнение $x^3 - 21x + 20 = 0$, для которого $\Delta = -243$,

$$u = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}}, \quad v = \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}},$$

имеет действительные корни 1, 4 и —5. Проверьте!

Этот факт математикам XVI в. казался парадоксальным. Как же так? Все коэффициенты уравнения действительные, все корни тоже, а промежуточные вычисления приводят к «мнимым», «фальшивым», «несуществующим» числам! Были предприняты отчаянные попытки освободить формулу (2) от нежелательных и непонятных «софистических» чисел, свести ее к другой или привести, по крайней мере случай $\Delta < 0$, к вычислению с действительными числами. Однако это никому не удалось — вот почему случай $\Delta < 0$ и был назван «неприводимым».

Математики оказались, как это с ними случалось не раз на протяжении многовекового развития науки, в очень трудном положении. Полностью игнорировать комплексные числа — означало бы отказаться не только от общности с большим трудом найденного решения в радикалах уравнения 3-й степени, но и от других замечательных математических достижений. Признать эти назойливо появляющиеся «чудовищные» числа, для которых в то время не было и тени реального истолкования, равноправными с вещественными числами было просто недопустимо с точки зрения здравого смысла. Как быть?

«Неприводимый» случай заинтриговал и привлек внимание многих математиков к комплексным числам. Кардано был одним из первых ученых, формально оперировавшим комплексными числами. Многое из того, что осталось неясным для Кардано, разъяснил в своей «Алгебре» (1572) другой итальянский математик — Р. Бомбелли[1]. Он, в частности, указал на то, что в «неприводимом» случае формула Кардано в некоторых случаях приводит к действительным корням потому, что u и v представляют собой не произвольные, а сопряженные комплексные числа. Бомбелли впервые изложил правила действий над комплексными числами почти в современной форме. Он указал, что (в современных обозначениях):

$$a + b\sqrt{-1} = a' + b'\sqrt{-1}, \text{ если } a = a' \text{ и } b = b',$$

$$(a + b\sqrt{-1}) + (a' + b'\sqrt{-1}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{-1},$$

$$(a + b\sqrt{-1})(a' + b'\sqrt{-1}) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)\sqrt{-1}.$$

Ф. Виет, «отец символической алгебры», не признавал ни комплекс-

---

[1] См.: Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М., 1963, с. 90.

ных, ни отрицательных корней уравнений, в то время как А. Жирар, автор замечательного произведения «Новое изобретение в алгебре» (1629), уделял им большое внимание. Последнее объясняется тем, что Жирар впервые сформулировал так называемую «основную теорему алгебры», впоследствии строго доказанную Гауссом: всякое алгебраическое уравнение n-й степени имеет n корней, действительных и *мнимых*. Без учета комплексных чисел эта важнейшая теорема теряет свою общность, фактически не имеет места. О том, каковы были взгляды математиков XVII и XVIII вв. на комплексные числа, можно судить по следующему высказыванию Жирара[1]: «Могут спросить, к чему эти невозможные решения?

Я отвечаю — для трех вещей: 1) для справедливости общего правила, 2) так как других решений нет и 3) ради пользы».

«Пользу» принесли комплексные числа и Декарту в его аналитической геометрии при поисках точек пересечения окружности с параболой: если «окружность не пересекает и не касается параболы ни в одной точке, то это означает, что уравнение не имеет ни истинных, ни ложных корней, ибо все они воображаемые»[2]. «Ложными» Декарт называл отрицательные числа, «воображаемыми», или «мнимыми», — комплексные. Итак, в данном случае мнимые числа полезны тем, что они указывают на реальное взаимное расположение двух линий. Интересно отметить, что Декарт, отождествлявший действительные числа с отрезками числовой оси, считал, что для комплексных чисел не может существовать никакого реального истолкования и что они обречены навеки оставаться лишь воображаемыми, мнимыми (наименование *мнимые числа* вошло в употребление в XVII в., после Декарта). Таких же взглядов придерживались и другие великие математики того времени, в том числе Ньютон и Лейбниц.

В XVII в. лишь один ученый, Дж. Валлис, в своем произведении «Алгебра, исторический и практический трактат» (1685) указал на возможность геометрического истолкования мнимых чисел и даже сделал попытку истолковать действия сложения и вычитания этих чисел с помощью отрезков, перпендикулярных к прямой, называемой ныне действительной осью, однако он не дошел до введения понятия мнимой единицы (i).

Состояние физико-математических наук той эпохи и общее увлечение исчислением бесконечно малых оставили в тени попытку Валлиса на целое столетие. Лишь после того как в XVIII в. многие задачи математического анализа, механики и геометрии потребовали широкого применения операций с комплексными числами, создались благоприятные условия для геометрического истолкования комплексных чисел.

---

[1] См.: Декарт Р. Геометрия. Пер. Юшкевича А. П. М.; Л., 1938, с. 232—233.

[2] См. там же, с. 98

5. Комплексные числа в XVIII в. Формула Муавра. Труды Даламбера и Эйлера

Применению комплексных чисел в дифференциальном и интегральном исчислении положили начало Готтфрид Вильгельм Лейбниц и Иоганн Бернулли, которые еще в 1702 г., хотя и чисто формально, использовали логарифмы мнимых чисел для интегрирования дробей с мнимыми знаменателями. В 1712—1713 гг. между Лейбницем и И. Бернулли возник спор относительно природы логарифмов от комплексных и отрицательных чисел. В переписке по этому поводу Лейбниц утверждал, что логарифмы отрицательных чисел мнимы, Бернулли же считал, что они действительны. В спор вмешался Даламбер, поддержав ошибочные в этом вопросе взгляды И. Бернулли. Вопрос был разрешен лишь в 1749. Эйлером в пользу Лейбница.

Известная формула Муавра

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi \qquad (1)$$

была установлена им еще в первой четверти XVIII в., но даже не в явном виде, а вот так:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-1}}}, \qquad (2)$$

где $x = \cos B$, $l = \cos A = \cos nB$. В наших символах:

$$\cos B = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos nB + \sin nB\sqrt{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\cos nB + \sin nB\sqrt{-1}}}. \qquad (3)$$

Абраам де Муавр, французский ученый, проживавший в Англии, впервые изложил свой результат в 1707 г. в журнале Лондонского королевского общества (так называется Английская Академия наук) — «Philosophical Transactions» («Философские труды»). Впоследствии он продолжил свои исследования, связанные с этой формулой. Как видно из (2) и (3), Муавра интересовало главным образом представление $\cos B$ через $\cos nB$. Лишь Эйлер во «Введении в анализ» приводит формулу Муавра в современном виде. Впрочем, тогда вместо i Эйлер, как и все его современники, еще писал $\sqrt{-1}$. Символ i, первая буква в латинском слове imaginarius (мнимый, воображаемый), был введен Эйлером в одной своей рабо-

те 1777 г., опубликованной в 4-м томе его «Интегрального исчисления» (1794).

После установления формулы Муавра вошло в употребление представление комплексных чисел в тригонометрической форме, что облегчило решение целого ряда задач.

Еще в 1740 г. Эйлер, рассматривая дифференциальное уравнение свободного гармонического колебания[1], получил его частное решение в двух различных видах: $2\cos x$ и $e^{xi} + e^{-xi}$. Убедившись в их тождестве с помощью разложения в ряды, Эйлер установил, что

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}. \tag{4}$$

В одном из своих мемуаров 1743 г., посвященных интегрированию линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, Эйлер выводит формулу

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x. \tag{5}$$

Во «Введении в анализ» он[2], исходя из формулы (1), устанавливает:

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}. \tag{6}$$

Это окончательно сформулированные и доказанные знаменитые «формулы Эйлера», из которых он прямо выводит (Проверьте!) ранее установленную им другим путем формулу (5), также носящую его имя. Относительно значения этих формул сам Эйлер пишет: «Отсюда понятно, каким образом мнимые показательные количества приводятся к синусам и косинусам действительных дуг». Установление связи между тригонометрическими функциями и показательной сыграло большую роль в математике, в частности в развитии понятия комплексного числа.

В работе «Рассуждения об общей причине ветров» (1749) Даламбер установил основные свои результаты благодаря использованию формул Эйлера. В этой работе Даламбер вводит понятия «модуль» и «аргумент» комплексного числа (сами же эти термины были введены в XIX в. Арганом и Коши). Впрочем, Даламбер впервые стал рассматривать комплексное число как аргумент (т. е. переменное) функции. Это он сделал в 1746 г., желая доказать, что, каковы бы ни были величины $a + ib$ и $g + ih$, существуют действительные числа A и B такие, что

$$(a + ib)^{g+ih} = A + iB.$$

---

[1] См. выше, ч. I, 51.

[2] См.: Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. М., 1961, т. I, с. 114.

Под воображаемыми (мнимыми) числами в первой половине XVIII в. понимали не только числа $a + bi$, но и любые величины, подчиняющиеся тем же правилам арифметики, что и действительные числа. Например, Даламбер, доказывая в 1748 г. основную теорему алгебры, формально записывал произвольный многочлен n-й степени

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

в виде произведения

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n),$$

где x_1, x_2, ..., x_n — действительные или «воображаемые» числа, и доказывал, что в том случае, когда числа x_1, x_2, ..., x_n воображаемые, они имеют вид $a + bi$. В той же работе Даламбер утверждал, что любую функцию от мнимой величины $x + iy$ можно представить в виде $p + iq$. Одновременно и Эйлер во «Введении в анализ»[1] писал: «Переменное количество охватывает собою решительно все числа, как положительные, так и отрицательные, как целые, так и дробные, как рациональные, так и иррациональные и трансцендентные. Даже нуль и мнимые числа не исключаются из значений переменного количества. Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств». Последнее можно рассматривать как первое явное определение функции комплексного переменного.

В 70-х годах XVIII столетия Эйлер и Лагранж применяют понятие комплексного переменного к решению задач разного рода, в том числе и задачи построения географических карт. В одном из своих писем Лагранж высказал мысль о том, что мнимые величины больше не затрудняют ученых, а вычисления с ними производятся так же легко, как с действительными числами.

Благодаря Эйлеру, Даламберу и Лагранжу комплексные числа становятся в конце XVIII в. одним из важнейших средств исследования проблем алгебры, дифференциального и интегрального исчисления и связанных с ними вопросов естествознания. Ни один из видных математиков уже не мог игнорировать комплексные числа, как это делали ученые XVI и даже XVII в.

Представление произвольных мнимых величин в виде $a + bi$ позволило изображать эти величины точками плоскости с координатами a, b. Такое изображение мы встречаем в 50-х годах XVIII в. в работах Даламбера и Эйлера по гидродинамике, а также в позднейших работах Эйлера по картографии. Однако, пользуясь реальным истолкованием мнимых величин в виде пар действительных чисел или точек плоскости в своих работах, посвященных прикладным вопросам, Даламбер и Эйлер не рассматривали эту проблему в своих чисто математических теоретических работах. В зна-

[1] См.: Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных, т. I, с. 24.

чительной степени по этой причине мнимые величины продолжали называть и считать «мнимыми».

На самом исходе века, в 1797 г., Лазарь Карно писал: «Никто ведь не сомневается в точности результатов, получаемых при вычислениях с мнимыми количествами, хотя они представляют собой только алгебраические формы и иероглифы нелепых количеств...»[1]. Такое отношение объяснялось тем, что Карно не знал геометрического истолкования комплексных чисел.

6. Геометрическое истолкование комплексных чисел в XIX в.

К концу XVIII в. геометрическое истолкование комплексных чисел, встречавшееся в 50-х годах этого века в прикладных работах Даламбера и Эйлера, постепенно применяется все большим числом математиков. Эта интерпретация использовалась Гауссом в диссертации, написанной в 1797 г. и опубликованной в 1799 г. Специально этому вопросу была посвящена работа датского землемера Каспара Весселя, опубликованная в 1799 г. (однако эта работа, напечатанная на датском языке, стала известна широким кругам математиков только через сто лет, когда был опубликован ее французский перевод). Этому же вопросу посвящена работа Ж. Аргана, вышедшая в 1806 г. Работа Весселя «Об аналитическом представлении направлений» содержит *полное* геометрическое построение теории комплексных чисел, рассматриваемых как *векторы* плоскости. Хотя в своей работе Вессель стремился главным образом к решению ряда практических задач геодезии и землемерия, он упоминает, что применяемым им исчислением «удается не только избегать всех невозможных операций, но и удается объяснить те парадоксы, когда по необходимости прибегают по нескольку раз к невозможному для отыскания возможного». Под «невозможными операциями» Вессель понимает операции с комплексными числами.

Работа Весселя оставалась неизвестной математикам на протяжении целого столетия. Она обратила на себя внимание ученых лишь в последней четверти XIX в. Вот почему первая по времени полная геометрическая интерпретация комплексных чисел (рис. 57) на развитие последних почти никакого влияния не оказала. Но самой идеей этой интерпретации уже был в то время

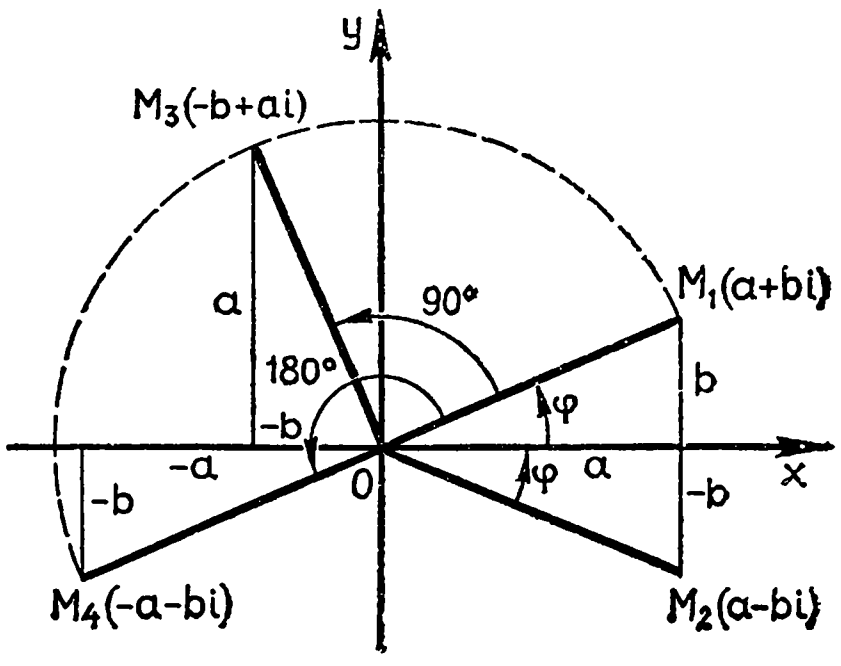


Рис. 57.

[1] См.: Декарт Р. Геометрия М.; Л., 1938, с. 209.

озарен не один Весселъ, а ряд математиков, в том числе Арган и Гаусс.

В 1806 г. в Париже была опубликована без имени автора книга Аргана «Опыт представления мнимых чисел с помощью геометрических построений», близкая по содержанию к работе Весселя. Некоторое время работа Аргана тоже оставалась незамеченной. С ней ознакомились многие ученые, и вокруг нее завязался оживленный спор лишь после того, как известный французский математик Жергонн опубликовал ее в 1813 —1815 гг. в издаваемом им авторитетном органе «Анналы чистой и прикладной математики» (коротко, «Анналы Жергонна»). Спору был положен конец, и подавляющее большинство математиков склонилось к новой точке зрения лишь после того, как были опубликованы работы Гаусса и Коши по данному вопросу.

Идея геометрического представления комплексных чисел, возникшая, как мы видели, еще в XVII в. у Валлиса, применялась Даламбером и Эйлером. Для построения полной интерпретации Даламберу и Эйлеру не хватало геометрического представления операций над комплексными числами[1]. Гаусс применял комплексные числа не только в исследованиях по алгебре, теории чисел, теории функций и т. д., но и в элементарной геометрии. Геометрическая концепция комплексных чисел стала для него не просто ясным, но и близким делом уже в первом десятилетии XIX в. Об этом можно судить и по одному из его писем к Бесселю (см. эпиграф к § 14). Тем не менее Гаусс на протяжении первых трех десятилетий XIX в. не опубликовал ни одной работы, в которой изложил бы полное геометрическое истолкование комплексных чисел и действий над ними; в печати он не высказался ни по поводу найденного Арганом и другими такого истолкования, ни вообще о сущности и природе комплексных чисел. Впрочем, в этом вопросе в первой четверти XIX в. продолжают господствовать взгляды математиков прошлого века. Этих взглядов долгое время придерживался и Коши, который, с одной стороны, рассматривал комплексные числа как чисто «символические» выражения, с другой же — в своих работах фактически постоянно ассоциировал число $x + iy$ с точкой (x, y) плоскости. Именно благодаря Коши термин «*модуль* комплексного числа», встречающийся впервые у Аргана, вошел в общее употребление (1821). Коши впервые назвал числа $a + bi$, $a - bi$ *сопряженными*.

Геометрическое истолкование комплексных чисел и действий над ними окончательно закрепилось в математике лишь после того, как Гаусс опубликовал в 1831 г. свою работу по теории чисел — «Теорию биквадратных вычетов».

В этой работе Гаусса впервые появилось наименование *норма числа* $A + bi$ для квадрата его модуля, т. е. для выражения $a^2 +$

---

[1] Такова точка зрения А. И. Маркушевича. См.: Маркушевич А. И. Очерки по истории аналитических функций. М., 1951, с. 32.

$+ b^2$, и сам термин «комплексные числа»[1], т. е. числа, составленные из разного рода единиц; 1 и i (латинское слово complexus означает «совокупность, соединение, состав») Тем самым Гаусс ликвидировал свое прежнее наименование, «фиктивные числа», которое, как и наименование «мнимые числа», отражало укоренившийся веками неправильный взгляд на эти числа.

К. Гаусс

В своей работе Гаусс впервые обосновал общий формальный характер учения о числе почти полностью так, как это распространено в современной математике. Вскоре на новую, научную позицию при рассмотрении комплексных чисел стал и Коши. К середине XIX в. путь к осмыслению и признанию комплексных чисел был фактически закончен. Процесс развития понятия комплексного числа характерен и для эволюции многих других математических понятий.

Понятие о комплексном числе, первоначально возникшем при решении квадратных уравнений, как о чисто мнимом числе в ходе своего развития постепенно перерастает в новое понятие, обобщающее как вещественное, так и чисто мнимое число, каждое из которых выступает теперь как частный случай числа $a + bi$. На числа этого вида распространяются все ранее известные правила операций. В этом и выражается одна из форм диалектического развития математических понятий.

Пытаясь решить некоторые проблемы механики, английский математик У. Р. Гамильтон в 1843 г. пришел к необходимости обобщить понятие комплексного числа, введя «четвертные числа», так называемые *кватернионы* (от латинского *quaterni* — по четыре), числа, представляющие собой линейные комбинации не двух (как 1 и i в комплексном числе), а четырех «базисных единиц»: 1, i, j, k, т. е. числа вида:

$$a + bi + cj + dk, \qquad (1)$$

где a, b, c, d — действительные числа. Действия над кватернионами, если исключить применение переместительного закона умножения, производятся как над многочленами относительно 1, i, j, k с учетом правила умножения «базисных единиц». Кватернионы представляют собой частный случай более общего понятия гиперкомплексных чисел, представляющих собой линейную комбинацию n базисных единиц и имеющих вид:

$$x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n,$$

[1] Фактически термин «комплексные числа» впервые встречается у Карно.

Г. Грассман

где x_1, x_2, ..., x_n — действительные числа. Теорию одного вида этих чисел изложил в 1844 г. немецкий ученый Г. Грассман. Общая теория систем гиперкомплексных чисел, называемых также линейными ассоциативными алгебрами, была разработана американским алгебраистом Бенджаменом Пирсом (1809—1880). Важнейшим частным случаем линейной ассоциативной алгебры является алгебра матриц, теория которой была впервые построена английским алгебраистом Артуром Кэли (1821—1895) в «Мемуаре о теории матриц», напечатанном в 1858 г.

Георг Фробениус (1849—1917) в 1878 г. доказал, что из линейных ассоциативных алгебр полями являются только поля действительных и комплексных чисел, а если отказаться от коммутативности, то некоммутативным полем (такие поля называют также телами) является только алгебра кватернионов. Важный вклад в теорию алгебр внес К. Вейерштрасс и русский алгебраист Федор Эдуардович Молин (1862—1941), работавший в Юрьеве (ныне Тарту) и Томске. В связи с этими попытками обобщения выяснилось, однако, что если потребовать сохранения всех свойств и правил арифметических действий (однозначное определение суммы и произведения двух чисел, существование нуля и противоположного элемента, переместительность и сочетательность сложения и умножения, дистрибутивность умножения и возможность деления), то дальше системы обыкновенных комплексных чисел вида $a + bi$ идти нельзя: уже в случае кватернионов приходится жертвовать коммутативностью умножения и т. п. Это имеют в виду, когда, доходя до комплексных чисел, говорят, что понятие числа дальнейшего обобщения не допускает, или получить расширение числовой системы за пределы комплексных чисел нальзя. Работы Гамильтона и Грассмана привели к расширению понятия алгебраической операции и к построению алгебр над различными множествами объектов. Кватернионы дали толчок развитию алгебры векторов, применяемой в современной физике и технике. Они нашли приложение и в теории чисел, в частности в работах советского математика Ю. В. Линника.

Учение о комплексных числах и теория функций комплексного переменного находят в XX в. важнейшие применения в естествознании и технике, в частности в теории электричества и электротехники, в динамике, аэродинамике и теории упругости.

Особенно следует отметить применение комплексных чисел к нахождению профиля крыла самолета и к выводу основных закономерностей теории самолета.

Среди виднейших современных ученых, работающих в области теории функций комплексного переменного и ее приложений, внесли значительный вклад и наши математики: В. Л. Гончаров, Н. Е. Жуковский, М. В. Келдыш, М. Г. Крейн, М. А. Лаврентьев, А. И. Маркушевич, С. Н. Мергелян, Н. И. Мусхелишвили, И. И. Привалов, В. И. Смирнов, С. А. Чаплыгин и др.

§ 15. ИЗ ИСТОРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Сегодня мы знаем, что, логически говоря, возможно вывести почти всю современную математику из единого источника — теории множеств.

Н. Бурбаки

Проблемы, связанные с понятиями бесконечности, дискретности и непрерывности, рассматривались в математике, как и в философии, древнегреческими мыслителями начиная с VI в. дс н. э. Под влиянием сочинений Аристотеля эти проблемы широко обсуждались средневековыми учеными и философами в странах ислама и в Европе. Из европейских ученых средневековья напомним лишь автора «Трактата о континууме» (ок. 1330) англичанина Т. Брадвардина и автора произведения «О конфигурации качеств» (1371) француза Н. Орема[1]. Создание дифференциального и интегрального исчисления в XVII в., его развитие в XVIII в. и его обоснование в XIX в. еще раз убедительно показали, что через всю историю математики проходит идея преодоления различия между актуальной и потенциальной бесконечностью, с одной стороны, между дискретным характером числа и непрерывной природой геометрических величин — с другой. Однако впервые проблема математической бесконечности и связанных с нею понятий была широко и непосредственно поставлена в наиболее общем виде в теории множеств, основы которой были разработаны в последней четверти XIX в. Георгом Кантором (1845—1918).

Продолжим краткий исторический обзор, параллельно излагая и некоторые элементы, и простейшие понятия теории множеств[2].

Множество — одно из первоначальных неопределяемых математических понятий. Мы встречались с разными *числовыми множествами*, *элементами* которых являются числа той или иной природы (натуральные, целые, дробные, рациональные, иррациональные, действительные, комплексные, алгебраические, трансцендентные и др.). Можно говорить о множестве учащихся в классе,

---

[1] См.: Юшкевич А. П. История математики в средние века М., 1961, с. 387—403.

[2] Теория множеств популярно изложена в кн.: Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. М., 1965; Серпинский В. О теории множеств. М., 1966

Г. Кантор

деревьев в лесу, корней данного уравнения, точек на данном отрезке и т. п. Желая подчеркнуть, что в понятии множества самое важное — это идея объединения элементов каким-либо общим признаком, Георг Кантор писал: «*Под многообразием или множеством я понимаю вообще всякое многое, которое можно мыслить как единое*». Если множество имеет бесконечно много элементов, то оно называется *бесконечным*, например множество всех положительных чисел. Если же множество содержит конечное число элементов, то его называют *конечным*; таким является, например, множество сторон пятиугольника. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*, примером может служить множество всех действительных корней уравнения $x^2 + 5 = 0$.

Если отвлечься от природы и порядка элементов, то два конечных множества могут отличаться между собой только *количеством* своих элементов. Для сравнения таких двух множеств не обязательно пересчитывать их элементы. Достаточно поставить их элементы во *взаимно однозначное соответствие*. Если это можно полностью осуществить, то количество элементов в обоих множествах одинаково, в противном случае количество элементов одного из них (и понятно какого) больше другого.

Именно этот принцип установления взаимно однозначного соответствия между элементами двух множеств и положил Г. Кантор в начале 70-х годов прошлого века в основу сравнения и исследования бесконечных множеств. Если между элементами двух любых множеств можно установить взаимно однозначное соответствие, то говорят, что эти множества имеют одну и ту же *мощность*, или они *равномощны*, или *эквивалентны*. Равномощность обладает свойствами рефлексивности, симметрии и транзитивности. «В случае конечных множеств, — писал Кантор, — мощность совпадает с *количеством элементов*». Вот почему мощность и называют также *кардинальным* (*количественным*) *числом*. Указанная простая и незначительная на первый взгляд идея Кантора привела его к замечательным открытиям, часто резко противоречащим обычной нашей интуиции. Так, в отличие от конечных множеств, на которые распространяется евклидова аксиома (целое больше части), бесконечные множества этому положению не подчиняются. Легко, например, констатировать равномощность множества натуральных чисел и его части (подмножества) — множества четных чисел путем установления следующего взаимно однозначного соответствия:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n & \ldots \end{array}$$

Эта характерная черта[1] любого бесконечного множества может быть положена в основу его определения: *множество называется бесконечным, если оно равномощно с одним из своих подмножеств.* Конечным называют множество, не эквивалентное ни одному из своих подмножеств. Любое множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называют счетным, так как его элементы можно занумеровать: a_1, a_2, ..., a_n, ...

Еще более поразительным оказалось другое открытие, сделанное Кантором в 1873 г. Все три множества — натуральных чисел, рациональных чисел, алгебраических чисел — имеют одну и ту же мощность, иначе говоря, *множество рациональных чисел и множество алгебраических чисел являются счетными множествами.* Ограничимся доказательством счетности множества рациональных чисел. Каждое рациональное положительное число может быть представлено в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, где p, q — натуральные числа. Чтобы показать, что дроби $\frac{p}{q}$ можно пронумеровать (или занумеровать), их располагают по величине суммы $p+q$. Свойством $p+q=2$ обладает только одна дробь $\frac{1}{1}=1$ — ее и ставят на первое место; условию $p+q=3$ удовлетворяют две дроби: $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{1}=2$ — вот почему они занимают второе и третье места. Следующие, четвертое и пятое места занимают дроби $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{1}=3$, для которых $p+q=4$, и т. д. Получаем такое взаимно однозначное соответствие:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & \ldots \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{3} & 3 & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & 4 & \frac{1}{5} & 5 & \frac{1}{6} & \frac{2}{5} & \frac{3}{4} & \frac{4}{3} & \frac{5}{2} & \ldots \end{array}$$

Поскольку каждое рациональное число имеет одну и только одну сумму числителя и знаменателя, то оно обязательно должно фигурировать в нижнем ряду. Множество отрицательных рациональных чисел, очевидно, тоже счетно. Если ввести теперь понятие *суммы* (или *объединения*) двух множеств[2], под которой понимают

---

[1] Еще в 1638 г. Галилей отметил в качестве «парадокса», что квадраты натуральных чисел можно поставить во взаимно однозначное соответствие с самими натуральными числами.

[2] См. гл. II, § 4; 32, где речь идет также о некоторых символах, применяемых в теории множеств.

такое множество, которое содержит все такие и только такие элементы, которые содержатся хотя бы в одном из данных множеств, то можно доказать, что сумма двух (и вообще конечного или счетного числа) счетных множеств есть счетное множество. Поэтому можно утверждать, что множество всех рациональных чисел счетно. Вышеизложенные результаты могли навести на мысль, что *все* вообще бесконечные множества счетны и, значит, равномощны и что поэтому и не имело смысла вводить понятие мощности. Однако в том же 1873 г. Кантор устанавливает существование неравномощных бесконечных множеств, доказав *несчетность множества действительных чисел*, значит, и множества точек прямой. Приведем второе доказательство Кантора несчетности множества действительных чисел, сообщенное им на съезде естествоиспытателей в Галле в 1891 г. и основанное на изобретенном им так называемом «диагональном методе». Рассмотрим сначала множество всех действительных чисел x в интервале $0 < x < 1$, в котором каждое число представляется как некоторая правильная бесконечная десятичная дробь[1]. Допустим, что все они пронумерованы и расположены в счетный ряд одна под другой:

$$\begin{array}{llll} 0, & x_{00} & x_{01} & x_{02} \ldots \\ & \searrow & & \\ 0, & x_{10} & x_{11} & x_{12} \ldots \\ & & \searrow & \\ 0, & x_{20} & x_{21} & x_{22} \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots & \searrow & \ldots \end{array} \qquad (1)$$

где x_{00}, x_{01}, ... обозначают любые из десяти цифр, взятые в любом порядке. Покажем, что существует такая десятичная дробь x', которая не содержится в схеме (1). Для этого выделим цифры x_{00}, x_{11}, x_{22}, ..., находящиеся на отмеченной стрелками диагонали схемы. В качестве первого десятичного знака искомой дроби x' выберем какую-нибудь цифру x'_{00}, отличную от x_{00}; второй знак x'_{11} отличен от x_{11} и т. д.; x'_{nn} отличен от x_{nn} и т. д. Новое число нашего интервала $x' = 0, x'_{00}, x'_{11}, x'_{22}, \ldots$ отличается от первой дроби первым своим десятичным знаком, от второй — вторым знаком и т. д., значит, оно не содержится в схеме (1). Это противоречие и доказывает, что множество действительных чисел указанного интервала несчетно. Теперь легко распространить доказательство на множество всех действительных чисел, представляя каждое из последних в виде суммы целого числа и бесконечной правильной десятичной дроби и применяя ко вторым слагаемым диагональный метод. Отсюда вытекает, что множество точек прямой, эквивалентное множеству действительных чисел, тоже несчетно. Итак, множество N натуральных чисел можно отобразить на часть множества R действительных чисел, но обратное не имеет места. Вот

[1] Вместо конечных дробей можно всегда писать дроби, кончающиеся периодом 9; например, вместо 0,217 напишем 0,216999... .

почему естественно сказать, что мощность множества действительных чисел больше мощности множества натуральных чисел. Вообще доказывается, что любое несчетное множество имеет бóльшую мощность, чем всякое счетное множество.

Кантор открыл, что не все бесконечные множества равномощны, что существуют разные степени бесконечности. На основе вышедоказанного можно вывести то, что существуют иррациональные числа. Действительно, так как мощность действительных чисел больше мощности счетного множества рациональных чисел, то должны существовать и иррациональные числа. Аналогично рассуждая, мы приходим к выводу, что существуют неалгебраические, т. е. *трансцендентные*, числа и что их даже больше, чем алгебраических. Действительно, множество трансцендентных чисел несчетно, ибо если бы оно было счетным, подобно множеству алгебраических чисел, тогда должна была бы быть счетной и сумма их — множество действительных чисел, что неверно.

Доказав, что среди различных мощностей бесконечных множеств существует наименьшая мощность и что ею является мощность множества натуральных чисел, Кантор обозначил эту мощность первой буквой (алеф) древнееврейского алфавита, снабженной индексом 0: $\aleph_0$ (читается «алеф-нуль»). Индекс 0 и должен, по замыслу Кантора, указать на то, что речь идет о *наименьшей* мощности. $\aleph_0$ является, таким образом, наименьшим бесконечным, или трансфинитным, кардинальным числом, характеризующим каждое бесконечное счетное множество. Мощность множества действительных чисел была названа мощностью континуума и обозначена буквой C. Итак, $\aleph_0 < C$. Не существует ли промежуточное между ними бесконечное множество, мощность которого была бы больше $\aleph_0$ и меньше C? Эта проблема названа «проблемой континуума». Кроме уже упомянутых двух мощностей (счетных множеств и континуума), существуют еще большие мощности, например мощность множества всевозможных действительных функций действительного переменного и др.

До Кантора считалось, что прямая содержит меньше точек, чем плоскость. Однако в 1878 г. Кантор доказал, что в единичном квадрате не больше точек, чем в единичном отрезке, указав способ установления взаимно однозначного соответствия между точками отрезка и квадрата. Таким образом, мощность двумерного континуума оказалась равной мощности континуума одного измерения. Аналогично можно доказать, что континуумы 3, 4, ... , n, ... бес-

Р. Дедекинд

конечного счетного множества измерений имеют такую же мощность, как и одномерный континуум.

Кантор ввел также *трансфинитные порядковые числа.* Дело в том, что конечные множества допускают лишь один тип упорядочения, характеризуемый порядковыми числами. Бесконечное же множество можно упорядочить различными способами. Для каждого возможного способа упорядочения или для всякого порядкового типа вводится его обозначение — трансфинитное число.

Уже из вышеизложенных кратких сведений можно сделать вывод, что в отличие от большинства своих предшественников Кантор первый предпринял прямое и широкое исследование самой математической бесконечности, получив совершенно новые, неожиданные результаты. Некоторые из идей теории множеств были предвосхищены еще в 30-е и 40-е годы XIX в. Б. Больцано. Однако, как мы уже знаем, труды последнего были опубликованы слишком поздно, для того чтобы оказать какое-либо влияние на развитие математики. Кроме того, у Больцано не было понятия мощности множества, поэтому он был очень далек от того размаха, который получило учение о бесконечности в трудах Кантора. Для последнего, впрочем, исходным пунктом были его исследования вопроса о существовании трансцендентных чисел и вообще разработка учения о действительном числе, которой почти одновременно занимался и Р. Дедекинд. Развитию теории множеств способствовали также исследования в области учения о тригонометрических рядах Фурье и других математических дисциплин, возникших в первой половине XIX в.

В середине 80-х годов Кантор систематически изложил свое учение о множествах — абстрактную теорию множеств. К тому времени вышли также работа Г. Фреге «Основания арифметики» (1884), работа Р. Дедекинда «Что такое числа и чем они должны быть» (1887) и др., для которых, как и для работы Кантора, характерен новый, абстрактно-логический метод, широко использующий прямые логические рассуждения вместо вычислений и выкладок. Дедекинд, в частности, также получил важные результаты в области теории множеств.

Идеи и открытия Кантора встретили с самого начала их появления резкое сопротивление со стороны некоторых его современников, например со стороны члена Берлинской Академии наук немецкого математика Л. Кронекера. Последний был одним из приверженцев выдвижения на первый план дискретной величи-

ны, натуральных чисел[1], исходя из которых было построено учение о рациональных и иррациональных числах. Тем не менее уже в начале 90-х годов теория множеств получила почти всеобщее признание и стала широко применяться в математике. Однако в 1895 г. математики впервые столкнулись с одним парадоксом («антиномия Бурали-Форти»), за которым последовали другие *парадоксы*, или *антиномии* (от греческих слов «анти» — против и «номос» — закон), теории множеств[2]. Одна из них, открытая английским философом и математиком Бертраном Расселом в 1902 г., относится к самым началам теории множеств и связана с понятием *множества всех множеств*. Каждое из обычных множеств, с которыми мы до сих пор встречались, не содержит само себя в качестве элемента; так, например, множество всех натуральных чисел само не является, конечно, натуральным числом. Такие множества назовем *нормальными* или *обыкновенными*. Однако существуют и такие необычные множества, которые являются собственными своими элементами, например множество всех вообще множеств. Такие множества назовем необыкновенными. Рассмотрим теперь множество M всех нормальных множеств и поставим вопрос: является ли M элементом самого себя? Иначе говоря, обыкновенное ли это множество или необыкновенное? Допустим, что M есть элемент M, т. е. необыкновенное множество. Тогда, поскольку в M входят все и только все обыкновенные множества, то M тоже обыкновенное множество. Таким образом, из допущения, что M — необыкновенное множество, вытекает, что оно обыкновенное множество, — противоречие! Допустим теперь, что M не является элементом M, т. е. что M — нормальное множество; тогда оно должно, как и все нормальные множества, содержаться в M. Итак, из допущения, что M — обыкновенное множество, вытекает, что оно необыкновеннсе множество, — опять противоречие!

Антиномия Рассела, обнаруженная в теории множеств, не имеет специфически математического характера и является общим логическим парадоксом. Так, сам Рассел приводит такой пример: деревенский парикмахер решил брить всех тех и только тех жителей своей деревни, которые не бреются сами. Спрашивается: должен ли он брить самого себя? Если он будет брить себя, значит, он тем самым включает себя в число тех, которые бреются сами, и тогда он не должен брить себя; если же он не будет брить себя, то он уже будет принадлежать к тем, которые сами себя не бреют, и, значит, он должен брить себя. Как же он должен поступить, чтобы выполнить свое решение? Можно, конечно, возразить, утверж-

---

[1] Известно глубоко ошибочное с исторической и диалектико-материалистической точки зрения изречение Кронекера: «Целые числа создал господь бог, все остальное — дело рук человеческих».

[2] Говорят, что какая-нибудь теория содержит антиномию, если в ней можно доказать две противоречащие друг другу теоремы.

Н. Н. Лузин

дая, что такого парикмахера никогда не было, нет и быть не может, считая, что последнее заключение как раз и подтверждается указанным парадоксом. От таких возражений, однако, парадоксальность, о которой идет речь, сама по себе не исчезает и не уменьшается.

Возникновение антиномий в теории множеств породило новый, третий по счету[1] глубокий кризис основ математики. Многие математики даже считали, что необходимо отказаться от теории множеств. Однако, поскольку антиномии не затрагивали непосредственно математические рассуждения и выводы в анализе и геометрии, в которые теория множеств внесла целый ряд интереснейших результатов, большинство математиков солидаризировались с известным заявлением Д. Гильберта: «Никто не может изгнать нас из рая, который создал нам Кантор...» Предпринятые же с самого начала XX в. различные попытки преодоления антиномий привели к различным точкам зрения на существо понятий множества, числа и других понятий, лежащих в основах математики.

Теория множеств оказала огромное влияние на дальнейшее развитие нашей науки в XX в. и в настоящее время, теоретико-множественные методы проникли в очень многие области математики. Благодаря введению общего понятия множества стало возможным еще в последней четверти XIX в. дать строгое определение действительного числа, на котором зиждется понятие предела, и завершить, таким образом, обоснование анализа, начатое в 20-х годах прошлого века. В связи с теорией множества возникали и развиваются новые математические дисциплины, например: теория функций действительного переменного, теоретико-множественная топология, функциональный анализ и др.

В нашей стране крупнейшая школа теории функций и множеств была создана еще в 1911 г. в Москве. Ее главой и вдохновителем стал несколько позже знаменитый советский математик, академик Н. Н. Лузин (1883—1950), внесший большой вклад в теорию множеств. Важнейших результатов добились и его ученики М. Я. Суслин, Д. Е. Меньшов, А. Я. Хинчин, академик П. С. Александров, академик П. С. Новиков и другие советские ученые.

---

[1] См. выше, ч. I, § 1; 9.

§ 16. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Без учета влияния случайных явлений человек становится бессильным направлять развитие интересующих его процессов в желательном для него направлении.

Б. В. Гнеденко

7. Основные понятия комбинаторики. Термины и символы

Комбинаторика занимается различного рода сочетаниями (соединениями), которые можно образовать из элементов некоторого конечного множества[1]. Термин «комбинаторика» происходит от латинского слова combina — сочетать, соединять.

Некоторые элементы комбинаторики были известны в Индии еще во II в. до н. э. Индийцы умели вычислять числа, которые мы обозначаем через C_n, т. е. сочетания из n элементов, взятых по m, и знали формулу

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

Проверьте!

В XII в. Бхаскара вычислял некоторые виды сочетаний и перестановки. Предполагают, что индийские ученые изучали соединения в связи с применением их в поэтике, науке о структуре стихов и поэтических произведений, например, в связи с подсчетом возможных сочетаний ударных (долгих) и безударных (кратких) слогов стопы, состоящей из n слогов. В древней Индии, в Средней Азии и Китае была также известна частично таблица биномиальных коэффициентов. Однако как научная дисциплина комбинаторика сформировалась лишь в XVII в.

Независимо от Апиана (XVI в.), Штифеля и Тартальи французский математик Эригон (XVII в.) определяет в своей «Практической арифметике» (1634) C_n^m. В книге «Теория и практика арифметики» (1656) другой французский автор, А. Такке, уже посвящает сочетаниям и перестановкам целую главу. Б. Паскаль в «Трактате об арифметическом треугольнике» и в «Трактате о числовых порядках» (1665) изложил учение о биномиальных коэффициентах, оперируя с ними как с сочетаниями. П. Ферма знал о связи магических квадратов и фигурных чисел с теорией соединений.

---

[1] О множествах см. § 15.

Термин «комбинаторика» стал употребляться после опубликования Лейбницем в 1666 г. работы «Рассуждение о комбинаторном искусстве», в котором впервые дано научное обоснование теории сочетаний и перестановок. Изучением «размещений» впервые занимался Якоб Бернулли во второй части своей знаменитой книги «Ars conjectandi» («Искусство предугадывания»), опубликованной в 1713 г. Он же ввел соответствующий термин и употреблял в нашем смысле также термин «перестановка». Термин же «сочетание» применял еще Б. Паскаль.

Современная символика сочетаний была предложена разными авторами учебных руководств лишь в XIX в. В частности, знак факториала (!) был введен в 1808 г. в одном французском учебнике Хр. Крампа. Термин же «факториал» был образован от слова «фактор» (множитель), происходящего от латинского *factor* — производящий.

Известно, что формула

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

приводит к введению определений:

$$C_m^0 = 1; \quad 0! = 1.$$

О том, что нуль-факториал должен быть по определению равен единице, писал еще в 1656 г. Дж. Валлис в «Арифметике бесконечных».

8. Формула бинома Ньютона. Дальнейшее развитие комбинаторики

Слово «бином» (от латинского «bis» — дважды и греческого «номос» — член) означает «двучлен», но формула

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + \\ + C_n^k a^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n \qquad (1)$$

представляет разложение не бинома, а целой положительной степени n бинома. В отношении же названия «бином Ньютона» мы знаем, что для натурального n эта формула была известна задолго до Ньютона многим ученым разных времен и стран, в том числе ал-Караджи (X в.), ат-Туси и ал-Каши (рис. 58), Тарталье, Ферма, Паскалю (рис. 59). Строгое доказательство формулы (1) для натурального n было дано в 1713 г. опять-таки не Ньютоном, а Якобом Бернулли.

В чем же заслуга Ньютона, имя которого носит эта формула? В том, что он распространил ее на любое действительное n,

n	2	3	4	5	6	7	8	9	№ члена
								9	9
							8	36	8
						7	28	84	7
					6	21	56	126	6
				5	15	35	70	126	5
			4	10	20	35	56	84	4
	—	3	6	10	15	21	28	36	3
	2	3	4	5	6	7	8	9	2

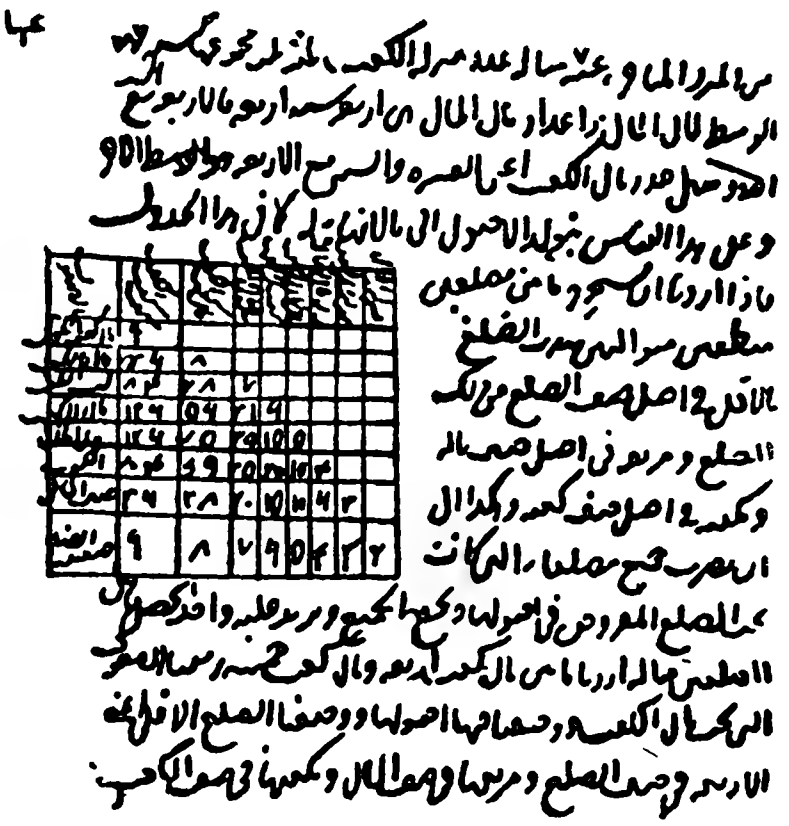


Рис 58 Русская транскрипция биноминальных коэффициентов у ал-Каши. Биноминальные коэффициенты до показателя, равного 9, у ал-Каши.

т. е. он показал, что формула (1) верна и тогда, когда n является рациональным или иррациональным, положительным или отрицательным числом. В настоящее время употребление дробных, отрицательных и иррациональных показателей кажется каждому девятикласснику несложным делом, однако в XVII в. Ньютон был первым человеком в мире, начавшим систематически употреблять в алгебре показатели, отличные от целых положительных. Скромное на первый взгляд дело — распространение формулы (1) на действительные показатели — имело огромное значение для развития математики. Пока показателю n придаются лишь натуральные значения, формула (1) имеет конечное число членов, а именно $n + 1$. Однако для отрицательного или дробного показателя число ее членов становится бесконечным.

Так, например, можно убедиться в том, что при $n = -1$ или $n = \frac{1}{3}$, положив для простоты $a = 1$, имеем соответственно:

$$(1 + b)^{-1} = 1 - b + b^2 - b^3 + b^4 - b^5 + \dots, \qquad (2)$$

$$(1 + b)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{b}{3} - \frac{b^2}{8} + \frac{b^3}{16} - \frac{b^4}{32} + \dots. \qquad (3)$$

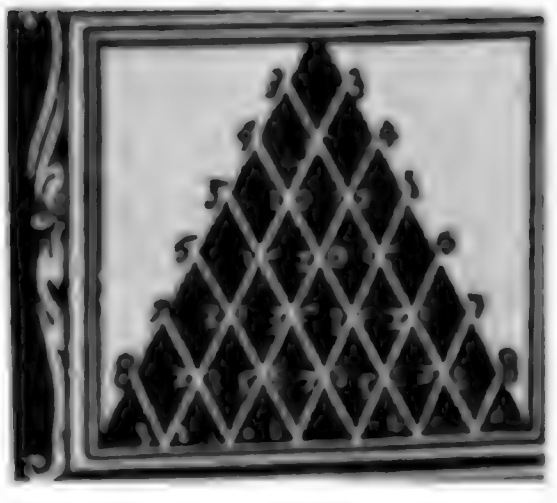


Рис. 59. Первый печатный «треугольник Паскаля», опубликованный в 1527 г. в «Арифметике» П. Апиана.

Полученные выражения уже не являются многочленами. Это *бесконечные ряды*[1]. Именно теория рядов, тесно связанная с другими разделами математического анализа и с приложениями последнего к решению многочисленных задач естествознания и техники, стала начиная со времен Ньютона одним из важнейших орудий математических исследований. Дальнейшие исследования формулы бинома связаны с именем Эйлера и других ученых XVIII и XIX вв.

Возвращаясь к комбинаторике, следует сказать, что во второй половине XVIII в. наметилось большое ее оживление, в связи с чем даже появилось название *комбинаторный анализ*[2], однако значительных результатов достигнуто не было. Комбинаторика в известной мере способствовала развитию теории определителей, она нашла важнейшее применение в теории вероятности, параллельно с которой она развивалась в XVII—XVIII вв. В настоящее время она применяется также в некоторых вопросах теории групп и в квантовой механике.

9. Понятие вероятности и зарождение науки о закономерностях случайных явлений

Теорию вероятностей нередко называют «наукой о случайном». На многих примерах можно убедиться в том, что массовые случайные явления тоже имеют свои закономерности, знание которых можно успешно использовать в практической деятельности человека. (Для ознакомления с элементами теории вероятностей см.: Гнеденко Б. В. Математика в современном мире. М., 1980.)

Как наука теория вероятностей зародилась в XVII в. Возникновение понятия вероятности было связано как с потребностями страхования, получившего значительное распространение в ту эпоху, когда заметно росли торговые связи и морские путешествия, так и в связи с запросами азартных игр. Слово «азарт», под которым обычно понимается сильное увлечение, горячность, является транскрипцией французского слова hasard[3], буквально означающего «случай», «риск». Азартными называют те игры (карты, домино и т. п.), в которых выигрыш зависит главным образом не от умения игрока, а от случайности. Риск, играющий важную роль в этих играх, и приводит участников в необычайное состояние сильного увлечения и горячности.

Азартные игры практиковались в ту пору главным образом среди знати, феодалов и дворян. Особенно распространенной была игра в кости. Было замечено, что при многократном бросании однородного кубика, все шесть граней которого отмечены соответст-

---

[1] О рядах см. ниже, § 18.

[2] Не следует смешивать этот термин с современной математической дисциплиной под этим же названием.

[3] Это слово арабского происхождения.

венно числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, число очков от 1 до 6 выпадает в среднем одинаково часто, иными словами, выражаясь языком математики, выпадение определенного числа очков имеет вероятность, равную $\frac{1}{6}$ (т. е. отношению числа случаев, благоприятствующих событию, к общему числу всех случаев). Аналогично вероятность появления на верхней грани кости *четного* числа очков равна $\frac{3}{6}$, так как из шести равновозможных случаев четное число появляется только в трех (2, 4, 6). Вероятность события A в науке обозначают символом $P\{A\}$, где P — начальная буква французского слова Probabilité — вероятность, A — слова Accident — случайность, происшествие. Итак, в последнем случае $P\{A\} = \frac{3}{6}$, а в общем случае $P\{A\} = \frac{M}{N}$, где N — общее число всех случаев, а M — число случаев, благоприятствующих событию.

Если A невозможно, то $P(A) = 0$, если же A — достоверное событие, то $P(A) = 1$.

Если $0 \leqslant M \leqslant N$, то вероятность $P(A)$ любого события A можно считать лежащей между нулем и единицей, т. е.

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

Один из представителей французской знати того времени, страстный игрок кавалер де Мере написал одному из крупнейших ученых того времени Блезу Паскалю письмо, в котором просил ответить на ряд вопросов, возникших у него в связи с игрой в кости. Вот один из вопросов: что происходит чаще при четырехразовом бросании кости — невыпадение шестерки или появление ее? Решение этой задачи[1] приводит к следующим результатам: 1) бросая четырежды кость, могут представиться всего $6^4 = 1296$ различных случаев; 2) шестерка ни разу не появится в $5^4 = 625$ случаях и, значит, появится хотя бы раз в 1296—625 = 671 случае. Итак, вероятность $\frac{671}{1296}$ того, что шестерка появится хоть раз, больше вероятности $\frac{652}{1296}$ невыпадения шестерки ни разу.

Подсчет всех возможных и благоприятствующих данному событию случаев нередко представляет большие трудности. Вот почему для решения таких задач некоторые игроки обращались к крупным ученым. Рассказывают, что Х. Гюйгенсу был задан такой вопрос: «Если бросить одновременно три игральных кости, то какая сумма очков будет выпадать чаще — 11 или 12?» Подсчет всех различных возможных случаев здесь прост: $N = 6^3 = 216$. Подсчет же M сложен. Сумма 11 может получиться следующими

---

[1] Подробно см.: Детская энциклопедия, т. 2, с. 456.

шестью различными способами: $1+4+6$, $1+5+5$, $2+3+6$, $2+4+5$, $3+3+5$, $3+4+4$. Также шестью различными способами образуется сумма 12: $1+5+6$, $2+4+6$, $2+5+5$, $3+3+6$, $3+4+5$, $4+4+4$. Это обстоятельство наводит на мысль, будто обе суммы должны появляться одинаково часто. Однако это неверно. Уже на практике было замечено, что сумма 11 появляется чаще суммы 12. Дело в том, что вышеуказанные сочетания по три числа сами по себе неодинаково часто выпадают. Так, если каждую из трех костей окрасить по-разному, скажем в белый, красный и зеленый цвет, то становится ясным, что сочетание, в котором имеются три различных слагаемых, например $(1+4+6)$, может получиться шестью различными способами:

1) 1 бел. + 4 крас. + 6 зел.; 2) 1 бел. + 4 зел. + 6 крас.;
3) 4 бел. + 1 крас. + 6 зел.; 4) 4 бел. + 6 крас. + 1 зел.;
5) 6 бел. + 1 крас. + 4 зел.; 6) 6 бел. + 4 крас. + 1 зел.

Аналогично сочетание с двумя одинаковыми слагаемыми, например $(1+5+5)$, может получиться тремя различными способами, в то время как сочетание с одинаковыми слагаемыми, вроде $(4+4+4)$, получается единственным способом. И вот для 11 очков мы получим, таким образом, не шесть различных способов, а

$$1\cdot 6+1\cdot 3+1\cdot 6+1\cdot 6+1\cdot 3+1\cdot 3=27.$$

Для суммы же 12 число различных способов будет:

$$1\cdot 6+1\cdot 6+1\cdot 3+1\cdot 3+1\cdot 6+1=25.$$

Полученный результат $P\{11\}=\frac{27}{216}$; $P\{12\}=\frac{25}{216}$ вполне соответствовал опытным данным игроков.

Решение порой довольно сложных задач, с которыми обращались заинтересованные лица к Паскалю, Ферма, Гюйгенсу, способствовало разработке основных понятий и общих принципов теории вероятностей, в том числе и правил действия над ними. Отсюда не следует, конечно, заключать, что основоположники теории вероятностей рассматривали азартные игры как единственный или главный предмет разрабатывавшейся ими новой отрасли науки. На развитие теории вероятностей оказали влияние более серьезные потребности науки и запросы практики, в первую очередь страховое дело, начатое в некоторых странах еще в XVI в. В XVI—XVII вв. учреждение страховых обществ и страхование судов от пожара распространилось во многих европейских странах. Азартные игры были для ученых только удобной моделью для решения задач и анализа понятий теории вероятности. Об этом заметил еще Гюйгенс в своей книге «О расчетах в азартной игре» (1657), которая была первой книгой в мире по теории вероятностей. Он писал: «...при внимательном изучении предмета читатель заметит, что он занимается не только игрой, а что здесь да-

ются основы теории глубокой и весьма интересной»[1]. В труде Гюйгенса, как и в работах и письмах Паскаля и Ферма[2], содержится теорема сложения (или свойство аддитивности) вероятностей, которая утверждает, что вероятность наступления либо одного, либо другого из двух несовместимых (исключающих друг друга) событий A_1 и A_2 равна сумме вероятностей, т. е.

$$P\{A_1 \text{ или } A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\}.$$

Методом математической индукции можно распространить эту формулу на n слагаемых:

$$P\{A_1, \text{ или } A_2, \text{ или } \ldots, \text{ или } A_n\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + \cdots + P\{A_n\}.$$

Упомянутые ученые применяли также теорему умножения вероятностей, имеющую следующее содержание: вероятность совмещения двух независимых событий (A_1 и A_2) равна произведению вероятностей каждого из них, т. е. $P\{A_1 \text{ и } A_2\} = P\{A_1\} \cdot P\{A_2\}$. Гюйгенс первый ввел важное для теории вероятностей понятие математического ожидания, которое получило дальнейшее развитие в трудах Даниила Бернулли, Даламбера и др. *Математическим ожиданием* игрока, имеющего вероятность P для выигрыша суммы S, является произведение $P \cdot S$. Например, лотерейный розыгрыш некоторого ценного объекта стоимостью в 3000 руб. при выпуске 1000 билетов ценою в 3 руб. каждый является справедливым, так как вероятность выигрыша каждого билета есть $\frac{1}{1000}$, а математическое ожидание покупателя равно

$$\frac{1}{1000} \cdot 3000 = 3 \text{ (руб.)},$$

именно столько, сколько он уплатил за лотерейный билет. Если количество выпущенных билетов было бы больше 1000, то при сохранении всех остальных условий игра уже не была бы справедливой. Если некоторые события A_1, A_2, ..., A_n, имеющие соответственно вероятности P_1, P_2 ,..., P_n, дают право на суммы S_1, S_2, ..., S_n, то математическое ожидание выразится суммой произведений:

$$P_1S_1 + P_2S_2 + \cdots + P_nS_n \qquad (1)$$

Понятие математического ожидания находит немало применений в разных других областях человеческой деятельности.

Таким образом, в 60-е годы XVII в. были выработаны первые

---

[1] См.: Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. М., 1969, с. 141.

[2] Работы Паскаля были опубликованы в 1665 г., а письма Ферма — в 1779 г. в издании его сочинений. Предшественниками Паскаля и Ферма были Кардано, Кеплер и Галилей.

понятия и некоторые элементы теории вероятностей. В последующие два века ученые столкнулись с множеством новых задач, связанных с исследованием случайных явлений.

10. Краткий обзор дальнейшего развития теории вероятностей

В начале XVIII в. Якоб Бернулли, развивая идеи Гюйгенса, разработал в своей книге «Искусство предложений», посмертно опубликованной в 1713 г., основы комбинаторики как аппарата для исчисления вероятностей, ввел ряд новых понятий и приемов и доказал одно из основных предложений теории вероятностей — «теорему Бернулли», являющуюся важным частным случаем так называемого «закона больших чисел», открытого в середине прошлого столетия П. Л. Чебышевым. Тут же ограничимся кратким изложением содержания теоремы Бернулли (рис. 60).

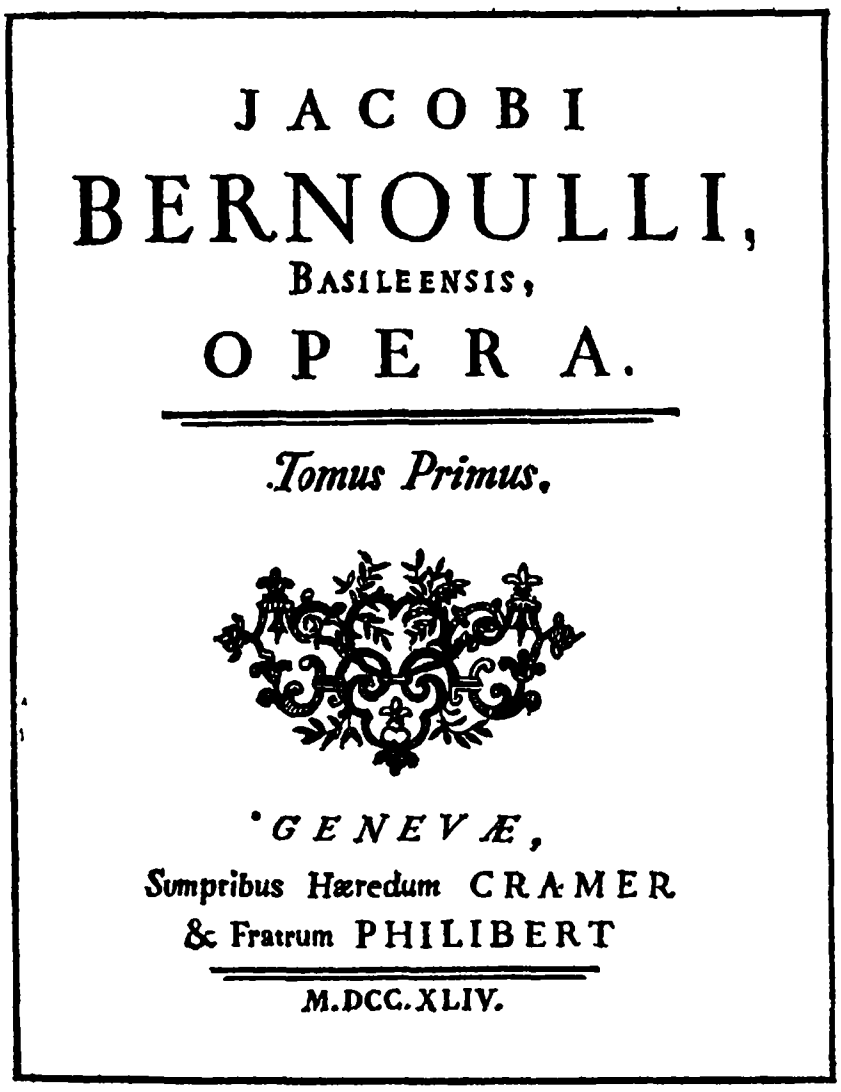
Пусть случайное событие A имеет при некотором испытании вероятность p и пусть среди чисел первых произведенных независимых n испытаний событие A имело место в m из них; тогда при достаточно больших n отношение $\frac{m}{n}$ приближенно равно вероятности P с любой наперед заданной степенью точности, т. е. вероятность того, что

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| > \varepsilon > 0,$$

будет стремиться к нулю при $n \to \infty$; это выражается формулой

$$\underset{n\to\infty}{P}\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Это предложение представляет собой один из важнейших законов теории вероятностей. Там, где нам неизвестны вероятности (p) случайных явлений, мы на основании теоремы Бернулли пользуемся приближенными их значениями $\left(\frac{m}{n}\right)$, что исключительно важно на практике, в страховом деле, демографии (науке о населении) и т. п. Например, вероятность рождения мальчика, играющая важную


JACOBI
BERNOULLI,
BASILEENSIS,
OPERA.

Tomus Primus.

GENEVÆ,
Sumptibus Hæredum CRAMER
& Fratrum PHILIBERT
M.DCC.XLIV.

Рис. 60. Титульный лист первого тома сочинений Я. Бернулли. Женева, 1744.

роль в вопросах демографии, принимается равной 0,511 на основании долголетних наблюдений, показавших, что в среднем на каждую 1000 рождений приходится 489 девочек и 511 мальчиков.

Благодаря теореме Бернулли теория вероятностей шагнула далеко за пределы вопросов азартных игр и применяется теперь во многих областях практической жизни и человеческой деятельности. Вот несколько примеров. В 1709 г. вышла в свет книга Николая Бернулли «Примеры искусства предположений в приложении к юридическим вопросам». В своей книге «Теория случая» (2-е издание, 1738) Муавр применил теоретико-вероятностные принципы для вывода числа сочетаний и трактовки проблемы «пожизненных рент». При исследовании этой проблемы Муавр основывался на таблицах смертности населения, составленных с помощью исчисления вероятностей астрономом Э. Галлеем. Пользуясь работой Муавра, Т. Симпсон опубликовал в 1740 г. книгу «Природа и законы случая». В дальнейшем Симпсон, как и Котес, внес важный вклад в проблему оценки ошибок при различных наблюдениях. Шотландский математик Дж. Крег попытался применить учение о вероятностях даже к... религии. В своем сочинении «Математические начала христианского богословия» (1699) он констатировал, что вера в истину христианской религии непрерывно ослабевает и, предположив, что она убывает пропорционально квадрату времени, вывел, что к 3150 г. религия совсем исчезнет...

Английский математик Т. Бейес явился автором теоремы (1763), носящей его имя. Любопытно отметить, что применением понятия вероятности к геометрии впервые занимался французский естествоиспытатель XVIII в. Ж. Бюффон, известный выдвинутым им положением о единстве растительного и животного мира.

Развитие естествознания и техники точных измерений, военного дела и связанной с ним теорией стрельбы, учения о молекулах в кинетической теории газов ставило перед учеными конца XVIII в XIX в. все новые и новые задачи из теории вероятностей. Одной из них была разработка теории ошибок измерений. Этой проблемой занимались многие математики, в том числе Котес, Симпсон, Лагранж, Лаплас. Последнему принадлежат обширные замечательные исследования, изложенные в его трудах: «Мемуар о вероятностях» (1778) и «Аналитическая теория вероятностей» (1814). Основы современной теории ошибок были созданы Лежандром и Гауссом. Важный вклад в теорию вероятностей внес С. Пуассон. Дальнейший расцвет теории вероятности связан с именем П. Л. Чебышева и его ближайших учеников А. А. Маркова и А. М. Ляпунова. В 25-летнем возрасте Чебышев написал первую свою работу в рассматриваемой нами области — «Опыт элементарного анализа теории вероятностей» (1845). Затем последовали другие его труды, в том числе работа «О средних величинах» (1867), в которой он чрезвычайно просто и элементарно доказал закон больших чисел в общей форме. Для ознакомления читателя с содержанием этого

фундаментального закона остановимся кратко на одном частном его случае.

Из формулы (1) (с. 219) мы уже знаем, что если случайная величина ξ принимает значения x_1, x_2, ..., x_n при соответствующих вероятностях p_1, p_2, ..., p_n, то математическим ожиданием (обозначаемым $M\xi$) или средним значением ξ называют сумму произведений:

$$M\xi = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n. \qquad (1)$$

Рассмотрим последовательность попарно независимых случайных величин ξ_1, ξ_2, ..., ξ_k, каждая из которых имеет математическое ожидание $M\xi = a$; тогда среднее арифметическое независимых случайных величин

$$\xi_k = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k}{k}$$

при достаточно большом их количестве (k) приближенно равно математическому ожиданию каждой из них, с любой желаемой точностью, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} P\{\,|\,\xi_k - a\,|\,> \xi\} = 0. \qquad (2)$$

Это и есть закон больших чисел. Нетрудно установить, что теорема Бернулли является частным случаем закона (2). Большое практическое значение закона больших чисел состоит в том, что за математическое ожидание массовой случайной величины можно принять среднее арифметическое k ее значений, полученных опытным путем. Эта замена будет тем законнее, чем больше будет k, число испытаний. Именно, основываясь на законе больших чисел, можно, например, судить о качестве большой партии пшеницы, содержащей десятки и сотни тонн, по нескольким сравнительно небольшим, скажем 200-граммовым, меркам, наполняемым случайно захваченными зернами из разных частей партии зерна. Такая выборка дает возможность установить с достаточной для практики степенью точности средний вес одного зерна и, значит, судить о качестве партии пшеницы в целом.

Работы П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, А. М. Ляпунова и других русских математиков оказали большое влияние на дальнейшее развитие теории вероятностей. Возникшая во второй половине XIX в. в трудах Р. Клаузиуса, Дж. Максвелла, Л. Больцмана, Дж. Гиббса и других ученых, *статистическая физика*, в которой исследуются свойства систем с точки зрения их атомистического строения с помощью специальных статистических методов, как и другие отрасли науки и техники, поставила перед теорией вероятностей ряд совершенно новых проблем, в том числе и разработку общей теории массовых случайных процессов, изучающей случайные величины. Вот одна из типичных задач теории случайных процессов: исходя из показаний опыта о том, что распады атомов про-

Б. В. Гнеденко

А. Н. Колмогоров

исходят в случайные моменты, определить, какова вероятность того, что за известный промежуток времени произойдет распад того или иного числа атомов. Это очень важно для изучения процесса радиоактивного распада.

Со второй половины XIX в. и поныне русские, а затем советские математики занимают ведущее место в развитии теории вероятностей. В первом десятилетии XX в. А. А. Марков положил начало теории последовательностей зависимых случайных величин, так называемых «цепей Маркова», которая вскоре стала важным средством изучения природы. Теорию цепей Маркова затем значительно развили С. Н. Бернштейн, В. И. Романовский, А. Н. Колмогоров и французские математики Ж. Адамар и И. Фреше. После того как трудами А. Н. Колмогорова, Е. Е. Слуцкого, А. Я. Хинчина и французского математика П. Леви была установлена связь между теорией вероятностей, с одной стороны, и теорией множеств и теорией функций действительного переменного — с другой, стало возможным добиться окончательного решения ряда классических проблем, поставленных еще в прошлом веке П. Л. Чебышевым.

А. Н. Колмогоров и А. Я. Хинчин положили начало общей теории случайных процессов, о которой говорилось выше. Разработка аксиоматики теории вероятностей означала новый этап в развитии этой науки. Первое по времени аксиоматическое построение теории вероятностей изложил в 1917 г. С. Н. Бернштейн. В настоящее время общепринятой стала аксиоматика, разработанная в 1933 г. А. Н. Колмогоровым. Среди видных современных советских математиков, разрабатывающих теорию вероятностей, следует назвать также Б. В. Гнеденко, внесшего важный вклад и в математическую статистику, Ю. В. Линника и многих других.

В настоящее время теория вероятностей продолжает развиваться в тесном контакте с развитием техники и разных ветвей современной теоретической и прикладной математики.

§ 17. ИЗ ИСТОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

В теории чисел и алгебре раскрывается загадочная реальность мира чисел.

Р. Курант

Учение о непрерывных или цепных дробях берет свое начало от Теэтета и Евклида. Но впервые дал научное изложение теории цепных дробей, играющих важную роль в математике, Х. Гюйгенс.

Исходя из алгорифма Евклида,

$$\begin{aligned}
&a = bq_1 + r_1 \quad (0 < r_1 < b),\\
&b = r_1q_2 + r_2 \quad (0 < r_2 < r_1),\\
&r_1 = r_2q_3 + r_3 \quad (0 < r_3 < r_2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n\,(0 < r_n < r_{n-1}),\\
&r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}\,(0 < r_{n+1} < r_n).
\end{aligned} \tag{1}$$

Можно записать следующий ряд равенств:

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b},\\
&\frac{b}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{r_{n-1}}{r_n} = q_{n+1}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Левая часть каждого из этих равенств представляет собой некоторую неправильную дробь, правая же — сумму целого числа с неправильной дробью. С помощью последнего ряда равенства можно выразить дробь $\frac{a}{b}$ исключительно через числа $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, q_{n+1}$. Действительно, $\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{\frac{b}{r_1}} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}$ и т. д.

Дробь $\frac{a}{b}$ окончательно представится в следующем виде:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots \\ \cdots + \cfrac{1}{q_{n+1}}}}. \tag{3}$$

Правая часть этого равенства и называется непрерывной или цепной дробью.

Вместо равенства (3) применяется и более сокращенная запись, а именно:

$$\frac{a}{b} = [q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{n+1}]. \tag{4}$$

Числа $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{n+1}$ называются *элементами* или неполными частными непрерывной дроби. В то время как $q_2, q_3, \ldots, q_{n+1}$ являются натуральными числами, q_1 — вообще целое число (положительное, отрицательное или нуль в зависимости от того, является ли дробь $\frac{a}{b}$ неправильной положительной, отрицательной или правильной). Поэтому часто вместо (4) применяется запись в виде

$$\frac{a}{b} [q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n], \ (q_n > 1) \tag{5}$$

и говорят об n членах непрерывной дроби. Итак, рациональные числа можно представить не только в виде обыкновенной дроби, или десятичной (конечной или бесконечной периодической), или вообще систематической; алгорифм Евклида позволяет представить любое рациональное число в виде непрерывной дроби. Каждая из этих форм представления имеет свои преимущества и недостатки, о которых будет идти речь ниже.

В теории непрерывных дробей большую роль играют так называемые подходящие дроби. Если в (3), соответственно (5) оборвать разложение в цепь после элемента q_0 (т. е. для нуль-членной непрерывной дроби), приближенное значение числа $\frac{a}{b}$ выразится в виде $\frac{a}{b} \approx \frac{P_0}{Q_0} = [q_0] = \frac{q_0}{1}$. Для одночленной непрерывной дроби ($n = 1$) будем иметь:

$$\frac{a}{b} \approx \frac{P_1}{Q_1} = [q_0, q_1] = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}.$$

Аналогично для $n = 2$ имеем:

$$\frac{P_2}{Q_2} = [q_0, q_1, q_2] = \frac{q_0 q_1 q_2 + q_0 + q_2}{q_1 q_2 + 1};$$

для $n = 3$ $\frac{P_3}{Q_3} = [q_0, q_1, q_2, q_3] = \frac{q_0 q_1 q_2 q_3 + q_0 q_1 + q_0 q_3 + q_2 q_3 + 1}{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3}$ и т. д.

Дробь $\frac{P_k}{Q_k}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ и называется подходящей дробью порядка k непрерывной дроби (5). Легко установить для числителей и знаменателей подходящих дробей следующие рекуррентные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} P_k &= P_{k-1}q_k + P_{k-2} \\ Q_k &= Q_{k-1}q_k + Q_{k-2} \end{aligned}\right\} \; k \geqslant 2, \tag{6}$$

при этом P_k и Q_k — числа всегда взаимно простые.

Для обращения простой дроби в непрерывную знаменатель делят на числитель, числитель делят на 1-й остаток, 1-й остаток — на 2-й и т. д., пока деление не кончится.

Из равенств (6) вытекает:

$$P_kQ_{k-1} - Q_kP_{k-1} = (-1)^{k-1}. \tag{7}$$

Возьмем, к примеру, дробь $\frac{61}{48}$; $61 = 1 \cdot 48 + 13$, $q_0 = 1, \frac{P_0}{Q_0} = 1$.

Вычисление располагают так: $\frac{61}{48}$

	1	3	1	2	4
61	48	13	9	4	1

$$\frac{61}{43} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}}.$$

$$48 = 3 \cdot 13 + 9, \quad q_1 = 3, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{4}{3};$$

$$13 = 1 \cdot 9 + 4, \quad q_2 = 1, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{5}{4};$$

$$9 = 2 \cdot 4 + 1, \quad q_3 = 2, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{14}{11};$$

$$4 = 4 \cdot 1, \quad q_4 = 4, \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{61}{48}.$$

Разложение дроби, о которой идет речь, коротко записывается так:

$$\frac{61}{48} = [1;\ 3,\ 1,\ 2,\ 4].$$

В приведенном примере имеем: $1 < \frac{5}{4} < \frac{61}{48}$; $\frac{4}{3} > \frac{14}{11}$, что является частным случаем общей теоремы, гласящей: подходящие

дроби четного порядка образуют возрастающую последовательность, нечетного — убывающую. Нетрудно также убедиться в том, что: 1) любая подходящая дробь четного порядка меньше любой подходящей дроби нечетного порядка; 2) подходящая дробь $\frac{P_k}{Q_k}$ несократима и записана с наименьшими из возможных числителем и знаменателем; 3) подходящие дроби поочередно то меньше, то больше $\frac{a}{b}$; 4) каждая последующая подходящая дробь ближе, чем предыдущая, к значению $\frac{a}{b}$.

Отправной точкой учения о непрерывных дробях послужил, как мы уже упоминали, алгорифм Евклида. Еще в средние века индийские математики, в том числе Бхаскара (XII в.), пользовались идеей непрерывных дробей при решении диофантовых уравнений. В современных терминах и обозначениях метод рассеивания Бхаскары для решения неопределенного уравнения $ax + b = cy$ (8) сводился к следующему. Пусть $\frac{a}{c} = [q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n]$; поскольку последняя подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$ равна самой дроби $\frac{a}{c}$, а предпоследняя $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ удовлетворяет равенству (7), то при $(a, c) = 1$ все возможные решения уравнения (8) выражаются формулами:

$$x = (-1)^n bQ_{n-1} + Q_n t, \quad y = (-1)^n bP_{n-1} + P_n t, \qquad (9)$$

где t — целое число. Для уравнения $100x + 90 = 63y$, решенного Бхаскарой, имеем: $\frac{100}{63} = [1; 1, 1, 2, 2, 1, 3]$, $n = 6$, $\frac{P_6}{Q_6} = \frac{27}{17}$. Итак, решение следующее:

$$x = 90 \cdot 17 + 63t, \quad y = 90 \cdot 27 + 100t.$$

Бхаскара получал наименьшие положительные целые решения $x = 18$, $y = 30$ (при $t = -24$). Совсем просто решается с помощью непрерывных дробей неопределенное уравнение вида $ax - by = 1$, например: $61x - 48y = 1$. Используя найденные выше подходящие дроби числа $\frac{61}{48}$, получим: $x = 37 + 48t$, $y = 47 + 61t$.

Не только каждое рациональное, но и любое иррациональное число можно разложить в непрерывную дробь, которая, однако, в последнем случае будет бесконечной, т. е. вида

$$[q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots]. \qquad (10)$$

Подходящей дробью $\frac{P_n}{Q_n}$ бесконечной непрерывной дроби (10) мы вообще называем конечную n-членную непрерывную дробь

$[q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n]$. Если существует предел подходящих дробей (10), т. е. если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \alpha$, то бесконечная непрерывная дробь (10) называется *сходящейся*, α — ее величиной. Соотношения (6) остаются в силе. В теории чисел доказывается, что рассматриваемые нами бесконечные непрерывные дроби, в которых q_0 — целое, а $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ — натуральные числа, всегда сходятся. Л. Эйлер впервые доказал, что любое рациональное число можно разложить в конечную, а иррациональное — в бесконечную непрерывную дробь. Верны и обратные теоремы. Разложение при этом оказывается *единственным*. Таким образом, между множеством всех действительных чисел и множеством всех непрерывных дробей устанавливается взаимно однозначное соответствие. Для того чтобы разложить иррациональное число ω в бесконечную непрерывную дробь, необходимо в первую очередь найти средства для выделения целой части ω, т. е. для нахождения q_0. Далее поступаем так: $\omega = q_0 + \frac{1}{\omega_1}$, где $\omega_1 > 1$. Далее полагаем: $\omega_1 = q_1 + \frac{1}{\omega_2}$, где q_1 — целая часть числа ω_1 и $\omega_2 > 1$ и т. д. Получим:

$$\omega = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}}.$$

Идеей разложения действительных чисел в непрерывные дроби в форме алгорифма Евклида пользовались в XI в. Омар Хайям и его последователи в странах Ближнего и Среднего Востока.

Этих математиков привели к действиям с иррациональными числами, в первую очередь с квадратичными иррациональностями, потребность в составлении астрономических таблиц и решение некоторых других задач вычислительной математики. Поиски приближенных значений $\sqrt{N}$, где N — любое натуральное число, являющееся неполным квадратом, восходят к древности. В связи с такими вычислениями некоторые математики XVI в. близко подошли к понятию непрерывной дроби, однако только в 1572 г. Р. Бомбелли в написанной им «Алгебре» подробно раскрыл представление о непрерывных дробях. Занимаясь теми же вопросами, другой итальянский математик, П. Катальди, первый ввел в 1613 г. повторное применение дробной черты, однако вместо повторяющегося знака сложения («+») он еще писал латинское слово et, дословно означающее «и». В его непрерывных дробях числителями служили не обязательно единицы, а любые целые числа, например:

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cdots}}$$

Некоторые авторы учебных руководств поныне оставляют название «непрерывных» для таких именно дробей, применяя термин «цепные дроби» лишь в случае, когда все числители равны единице. Непрерывные дроби появляются впервые у немецкого математика XVII в. Швентера. Непрерывные дроби рассматривал также Дж. Валлис в работе «Арифметика бесконечных» (1656), ими занимался и английский математик У. Броункер (1620—1684), который в одном из своих писем к Валлису изложил открытую им формулу

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 \ldots}}}} \tag{11}$$

Первую достаточно полную теорию непрерывных дробей разработал Х. Гюйгенс. Известно, что в 1680 г. он работал над «планетной машиной», вроде нашего планетария. Он задумал воспроизвести движение планет при помощи сцепления множества зубчатых колес, при этом отношение числа зубцов одного колеса к другому должно было равняться отношению времен оборотов вокруг Солнца соответствующих двух планет. Однако в таких отношениях приходится иметь дело с очень большими числителями и знаменателями. Перед Гюйгенсом стояла задача выразить эти отношения дробями с меньшими числителями и знаменателями. Так он и пришел к непрерывным дробям. Именно он нашел, что числители и знаменатели подходящих дробей — числа взаимно простые и что подходящие дроби являются наилучшими приближениями соответствующего числа.

Первую систематическую теорию непрерывных дробей разработал Л. Эйлер, который в 1737 г. ввел и сам термин «непрерывные дроби». Он опубликовал по данному вопросу ряд работ, итоги которых были им изложены в I томе его «Введения в анализ бесконечных» (1748). Эйлер говорит о двух формах или видах непрерывных дробей:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{и т. д.}}}} \tag{12}$$

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \text{и т. д.}}}}, \tag{13}$$

но рассматривает он главным образом непрерывные дроби (12).

Эйлер доказал многие предложения, высказанные его пред-

шественниками, и открыл много новых теорем. Ему принадлежит открытие равенства

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{Q_k Q_{k-1}}, \qquad (14)$$

из которого следует, что расстояния между соседними подходящими дробями уменьшаются по мере роста порядка k. Если не считать квадратичных иррациональностей, то имеются лишь немногие иррациональные числа, для которых известны какие-либо закономерности их разложения в непрерывные дроби. Эйлер нашел разложение в непрерывные дроби ряда иррациональных чисел, в том числе и следующих: e, $e-1$, $e+1$, $\frac{e-1}{e+1}$, $\frac{e^{\frac{2}{k}}-1}{e^{\frac{2}{k}}+1}$ (k — натуральное число). Вот два примера: 1) $e = [2;, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots]$; 2) $\frac{e-1}{e+1} = [0; 2, 6, 10, 14, \ldots]$. В последнем примере закономерность состоит в том, что элементы непрерывной дроби образуют арифметическую прогрессию.

Особый интерес представляет разложение в бесконечные непрерывные дроби квадратических иррациональностей, в учение о которых большой вклад внес Ж. Л. Лагранж. Пусть $\omega = \sqrt{2}$; тогда согласно вышеуказанному находим: $\omega_1 = \sqrt{2} + 1 = \omega_2 = \omega_3 = \ldots$. В итоге $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$; для краткости пишем: $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$. Нетрудно установить, что $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2\ldots] = [1; \overline{1, 2}]$. Далее $\sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, \ldots] = [2;\overline{4}]$ и т. д. Такие непрерывные дроби, в которых периодическими являются последовательности элементов, также называются *периодическими*. Если последовательность элементов q_0, q_1, q_2, ...чисто периодическая, то непрерывная дробь называется чисто периодической, в противном случае она смешанная. Вот пример чисто периодической непрерывной дроби:

$$\sqrt{2} + 1 = [2; 2, 2, 2, \ldots] = [\overline{2}].$$

В 1770 г. Лагранж доказал следующую теорему: *любая квадратическая иррациональность разлагается в периодическую непрерывную дробь*. Верна и обратная теорема. Лагранжу принадлежат и другие важные результаты в учении о бесконечных непрерывных дробях, в том числе приложения их к решению неопределенных уравнений.

Одну из замечательных теорем теории непрерывных дробей доказал в 1828 г. молодой французский математик Э. Галуа: необходимыми и достаточными условиями разложимости квадратической иррациональности $\alpha = \frac{A+\sqrt{B}}{C}$ (A, B, C — целые чис-

ла, $B > 1$) в чисто периодическую непрерывную дробь являются: 1) $\alpha > 1$, 2) $-1 < \alpha' < 0$, где α' — сопряженная с α иррациональность, т. е. $\alpha' = \frac{A - \sqrt{B}}{C}$. Так, например, квадратическая иррациональность $\frac{1 + \sqrt{13}}{3}$ разлагается в чисто периодическую непрерывную дробь, наоборот, $\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ — в смешанную. (Проверьте!)

Учение о непрерывных дробях развивалось на протяжении веков в связи с практическими и теоретическими запросами, требовавшими решения в основном следующих двух задач: 1) замены громоздких дробей близкими по значению к ним более простыми дробями и 2) замены иррациональных чисел по возможности более близкими к ним по значению рациональными числами.

Большое значение непрерывных дробей состоит именно в том, что, как доказывается в теории чисел, любая подходящая дробь $\frac{P_k}{Q_k}$ ($k \geqslant 2$) числа α является наилучшим его приближением (имеется в виду сравнение ее с любой другой дробью, у которой знаменатель не больше Q_k). Возьмем, к примеру, число π, для разложения которого в бесконечную непрерывную дробь Валлис вычислил 35 элементов. Укажем 10 из них: $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, \ldots]$. Значения подходящих дробей таковы:

$\frac{P_0}{Q_0} = 3$, этим значением π пользовались древние вавилоняне;

$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{22}{7}$, это приближенное значение восходит к Архимеду;

$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{333}{106}$, на это значение указал голландский ученый Адриан Меций (1571—1635);

$\frac{P_3}{Q_2} = \frac{355}{113}$, это значение было найдено еще в V в. китайским ученым Цзу Чунчжи и вновь найдено в Европе А. Мецием;

$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{103993}{33102}$.

И вот, когда мы говорим, что, например, $\frac{22}{7}$ есть лучшее рациональное приближение числа π, то мы имеем в виду, что нет дроби со знаменателем, меньшим или равным 7, которая была бы ближе к π, чем $\frac{22}{7}$. Поскольку эта подходящая дробь нечетного порядка, то она дает приближенное значение π с избытком. Аналогичное можно сказать о подходящей дроби $\frac{355}{113}$, которая вдобавок ближе по своему значению к π, чем дробь $\frac{22}{7}$. Важнейшие результаты в области наилучшего приближения иррациональных чисел при-

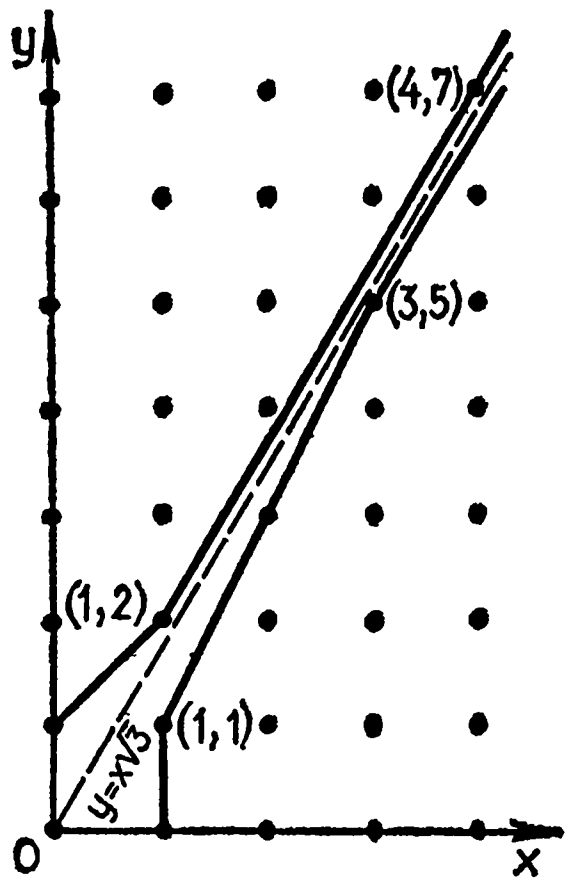


Рис. 61.

надлежат французскому математику Ж. Лиувиллю, русским и советским математикам П. Л. Чебышеву, А. А. Маркову (последний внес особо важный вклад в развитие теории алгебраических непрерывных дробей), А. Я. Хинчину и некоторым другим.

В 1895 г. Ф. Клейн предложил следующую наглядную геометрическую модель непрерывных дробей иррациональных чисел. Для простоты ограничимся рассмотрением некоторого положительного иррационального числа $\omega = \sqrt{3}$. В первом квадранте прямоугольной системы координат (рис. 61) рассмотрим из начала O все точки, координаты которых являются целыми числами. Любой луч, идущий от начала к какой-либо целочисленной точке (a, b) этого, по выражению Клейна, «звездного неба», характеризуется уравнением $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ и, обратно, на каждом «рациональном» луче $y = \frac{b}{a} x$ лежит бесконечное множество точек (ka, kb), где k, a, b — натуральные числа; иррациональный же луч $y = \omega x$ не содержит ни одной из точек «звездного неба», этот луч разбивает «небо» на две группы точек, одна из которых лежит справа, другая — слева от него. Замечательно то, что точки первой группы имеют координаты (Q_0, P_0), (Q_2, P_2), ..., (Q_{2k}, P_{2k}), точки же, лежащие слева от луча, имеют координаты (Q_1, P_1), (Q_3, P_3), ..., (Q_{2k+1}, P_{2k+1})..., где $\frac{P_r}{Q_r}$ — подходящие дроби в разложении числа ω в непрерывную дробь[1]. Указанные точки все ближе и ближе подходят к прямой $y = \omega x$ то с одной, то с другой стороны. Представим себе теперь, что во все точки «неба» вбиты тоненькие несгибаемые колышки или булавки. Обведя каждую из двух групп булавок плотно прилегающей к их основанию нитью, мы получаем две выпуклые ломаные, вершинами которых и являются точки (Q_r, P_r). Для $\omega = \sqrt{3}$ подходящими являются дроби $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \ldots$, следовательно, вершинами правой ломаной будут точки (1, 1), (3, 5), ..., левой — (1, 2), (4, 7) и т. д.

В заключение можно сказать, что непрерывные дроби имеют большое преимущество перед десятичными (и вообще систематическими) дробями, когда речь идет (в основном) о теоретическом требовании, возможно полнее и в чистом виде отображать свойства

[1] Доказательство см.: Klein F. Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie. Leipzig, 1907, s. 17.

представляемого числа, так как непрерывные дроби не связаны ни с какой системой счисления. Форма записи систематической дроби зависит, как известно, не только от величины числа, но и от основания соответствующей системы. Каждое рациональное число может быть только единственным образом представлено в виде конечной непрерывной дроби, в то время как в виде десятичной дроби оно представляется как в конечной, так и в бесконечной (периодической) форме. Непрерывные дроби лучше систематических (в частности, десятичных) дробей удовлетворяют также (в основном) практическому требованию — давать наилучшие приближения. Возникает вопрос: почему же непрерывные дроби сравнительно редко применялись на протяжении прошлых веков, да и в настоящее время мало применяются на практике по сравнению с десятичными дробями? Это обстоятельство объясняется тем, что с точки зрения практики вычислений непрерывные дроби не удовлетворяют одному важнейшему требованию: для них нет никаких практических удобных правил арифметических действий. В этом отношении они не могут идти в сравнение с десятичными дробями, являющимися удобным орудием счета. Вот почему в отличие от десятичных дробей, широко используемых в практике счета, непрерывные дроби применяются преимущественно для изучения отдельных иррациональных чисел, неопределенных уравнений, арифметических законов континуума и т. п.

В последнее время в некоторых областях теоретической и прикладной электротехники, в автоматике и вычислительной технике пользуются непрерывными схемами. Для решения задач, связанных с анализом и синтезом таких схем, в настоящее время применяются особые математические методы, в том числе непрерывные дроби[1].

§ 18. РЯДЫ

Ряд чисел мыслится уже неограниченно продолжаемым, и с ним в математику вступает бесконечность.

А. Д. Александров

Еще в древности ученые встречались как с понятием бесконечных последовательностей:

$$U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n, \ldots, \tag{1}$$

так и с понятием бесконечных рядов (или просто рядов):

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots. \tag{2}$$

---

[1] См., например: Каганов З. Г. Цепные дроби в электротехнике. Новосибирск, 1966.

Пользуясь введенным Эйлером знаком суммы Σ, мы вместо (2) обычно пишем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n. \tag{2'}$$

Символы U_1, U_2, ..., U_n, ... могут обозначать числа, функции, векторы, матрицы и т. п. Когда речь идет о числовых рядах, то рассматривают последовательность $\{S_n\}$ так называемых частичных сумм ряда (2):

$$\begin{gathered} S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \\ S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n. \end{gathered} \tag{3}$$

Если при $n \to \infty$ частичная сумма S_n имеет предел S, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то этот предел называют суммой ряда (2); при этом пишут:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S. \tag{4}$$

Если S представляет собой определенное число, то ряд (2) называют *сходящимся*, если S равно $\pm\infty$ или предела S_n вообще не существует, то ряд *расходящийся*. Таким образом, исследование сходимости числового ряда (2) и его суммы S сводится к рассмотрению сходимости последовательности (3) и ее предела.

Одним из примеров нахождения суммы числового ряда может служить суммирование членов бесконечной геометрической прогрессии, где, обозначая через a первый ее член и через q ее отличный от нуля знаменатель, имеем:

$$\therefore u_1 = a,\quad u_2 = aq,\quad u_3 = aq^2, \ldots, u_n = aq^{n-1}. \tag{5}$$

Частичная сумма этого ряда при $q \neq 1$ будет:

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Если $|q| < 1$, то прогрессия бесконечно убывает и соответствующий ряд сходится; так как S

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} = S$$

и есть по определению сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, рассматриваемой как числовой ряд. Это понятие *суммы*, конечно, шире обычного арифметического понятия этого слова, означающего не «предел», а результат сложения конечного числа объектов. Понятие «сумма ряда» связано как с операцией

арифметического сложения, так и с операцией предельного перехода.

Прогрессии, как мы уже знаем, были известны еще в глубокой древности. Сумма ряда натуральных чисел (которую можно рассматривать как сумму членов бесконечной арифметической прогрессии)

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} n \tag{6}$$

представляет собой ряд, однако этот ряд расходится. Помимо арифметических и геометрических рядов, древние греки знали и гармонический ряд. Ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots, \tag{7}$$

являющийся расходящимся, называется *гармоническим* потому, что каждый его член u_k является средним гармоническим между двумя соседними с ним членами, т. е. $\frac{1}{u_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{k-1}}+\frac{1}{u_{k+1}}\right)$. Например, пусть $u_k=\frac{1}{3}$, тогда $\frac{1}{u_k}=3$, $\frac{1}{u_{k-1}}=2$, $\frac{1}{u_{k+1}}=4$, и мы имеем:

$$3=\frac{1}{2}(2+4).$$

В тесной связи с формированием и развитием анализа бесконечных во второй половине XVII в. все чаще применяются бесконечные ряды. Появление среди рядов логарифмического ряда, опубликованного в «Логарифмотехнике» (1668) Н. Меркатора, связано с историей логарифмов.

В 1647 г. фламандский математик Григорий Санкт-Винцент открыл замечательную связь, существующую между логарифмами и площадью гиперболы. Суть этого открытия состоит в следующем.

Пусть имеем равнобочную гиперболу (рис. 62), изображаемую уравнением

$$y=\frac{1}{x}.$$

Возьмем на гиперболе четыре точки A, B, A', B' так, чтобы их абсциссы a, b, a', b' образовали пропорцию $a:b=a':b'$. Тогда криволинейные трапеции $AabB$ и $A'a'b'B'$ будут равновелики. Нам легко в этом убедиться. Действительно,

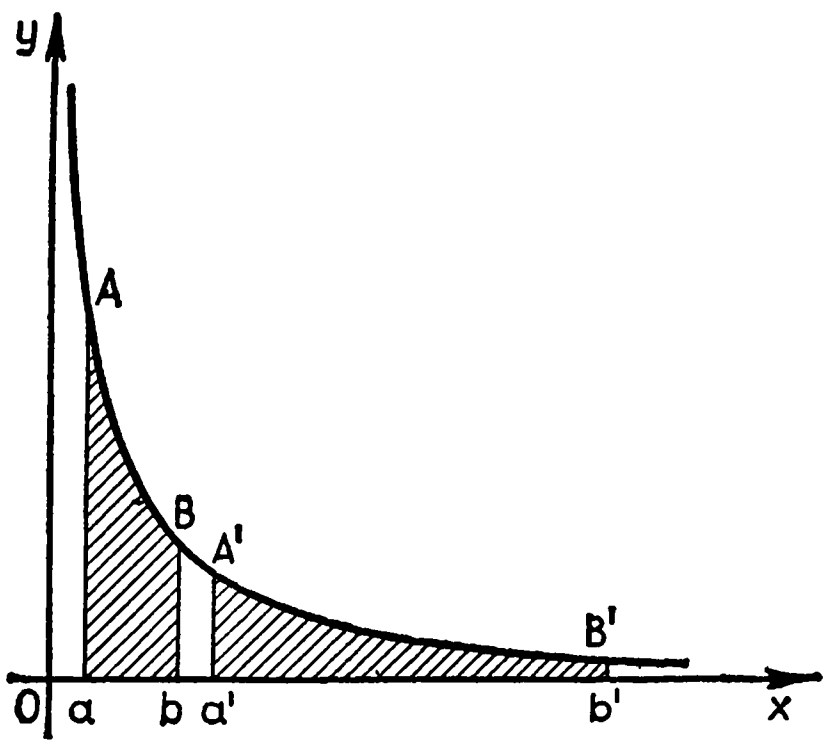


Рис. 62.

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a} = \ln\frac{b'}{a'} = \int_{a'}^{b'} \frac{1}{x}\,dx.$$

К этому же сводилось по существу и длинное доказательство Санкт-Винцента, писавшего свою работу до создания и оформления исчисления бесконечно малых. Обобщая полученный результат, рассмотрим теперь на гиперболе ряд точек, абсциссы которых

$$x_0 = 1,\quad x_1 = q,\quad x_2 = q^2, \ldots, x_k = q^k, \ldots \tag{8}$$

составляют геометрическую прогрессию. Тогда получим ряд эквивалентных криволинейных трапеций, площадь каждой из которых равна какому-то числу S, т. е.

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \cdots = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{dx}{x} = S. \tag{9}$$

Обозначим площадь криволинейной трапеции, построенной на отрезке (x_0, x_k) или вообще на отрезке $(1, x)$, через S_k, соответственно $S(x)$, т. е. $S(x) = \int_1^x \frac{dx}{x}$, тогда на основе (9) получаем:

$$S_k = kS,\quad \text{или}\quad S(x) = xS. \tag{10}$$

Последнее равенство говорит о том, что если абсциссы x точки, скользящей по гиперболе, образуют геометрическую прогрессию (8), то площади $S(x)$ соответствующих криволинейных трапеций образуют арифметическую прогрессию

$$0,\ S,\ 2S,\ 3S,\ \ldots,\ xS,\ \ldots. \tag{11}$$

Если обозначить через e такое число, для которого $S(e) = 1$, и принять $q = e^{\frac{1}{n}}$, где n — натуральное число, то получим следующие геометрическую и арифметическую прогрессии:

$$1,\ e^{\frac{1}{n}},\ e^{\frac{2}{n}},\ \ldots,\ e^{\frac{x}{n}},\ \ldots,\ e,\ \ldots,$$

$$0,\ S,\ 2S,\ \ldots,\ S(x),\ \ldots,\ 1,\ \ldots.$$

Согласно (10) будет: $S(q^n) = nS(q)$, т. е. $1 = nS(e^{\frac{1}{n}})$, или

$$S\left(e^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}.$$

Обобщая полученный результат, можно доказать, что вообще

$$S(x) = \log_e x, \text{ или } S(x) = \ln x, \tag{12}$$

а это означает: площадь криволинейной трапеции над отрезком $(1, x)$ оси абсцисс, ограниченная дугой равнобочной гиперболы, представляет собой натуральный логарифм числа x.

Основываясь на результате, полученном Санкт-Винцентом, член Лондонского королевского общества Николай Меркатор изложил в вышеназванном его произведении новый способ вычисления логарифмов.

Озаренный мыслью перенесения оси ординат вправо на единицу и записав уравнение гиперболы в виде

$$y = \frac{1}{1+x},$$

он получил из (12):

$$S(x) = \ln(1+x).$$

Меркатор выполнил деление 1 на $1 + x$ и выразил y как сумму бесконечной геометрической прогрессии, т. е. в виде ряда

$$y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \dots . \tag{13}$$

Площадь гиперболы от точки 0 до некоторой точки x представится тогда в виде

$$S(x) = \int_0^x y\,dx = \ln(1+x) = \int_0^x dx - \int_0^x x\,dx + \int_0^x x^2\,dx + \dots ,$$

или

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} - \dots . \tag{14}$$

Этот ряд и дает возможность вычислять логарифмы с желанной точностью. Если не считать геометрическую прогрессию, то (14) представляет собой первый пример разложения функции в степенной ряд.

В настоящее время известно, что логарифмический ряд (14) сходится лишь для значений x, удовлетворяющих равенству

$$-1 < x \leqslant 1,$$

т. е. в полуинтервале $(-1, 1)]$. Для $x = -1$ получаем расходящийся гармонический ряд.

Меркатор, однако, не обратил никакого внимания на вопрос о сходимости ряда (13), более того, на его чертеже взято $x > 1$... . О сходимости рассматриваемого ряда писал в своей рецензии Дж. Валлис.

Одним из достижений Валлиса было первое представление числа π в виде бесконечного произведения рациональных чисел:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdots . \quad (15)$$

Полагая в (14) $x = 1$, мы, в частности, получаем:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} - \cdots . \quad (16)$$

Английский математик Вильям Броункер нашел чисто геометрическим путем другое разложение в ряд ln 2, а именно:

$$\ln 2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots . \quad (16')$$

Броункер занимался и другими бесконечными рядами, стараясь учитывать необходимость того, что мы называем сходимостью ряда.

В своих работах «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов», «Метод флюксий и бесконечных рядов» и др. Ньютон широко пользовался идеей разложения функций в степенные ряды. Об этом он писал и Лейбницу в 1674—1676 гг.

Еще в середине 60-х годов XVII в., получив формулу бинома для натурального показателя, Ньютон сразу же приступил к выяснению того, действительна ли она и для отрицательных и дробных показателей. В частности, он проверил ее для показателей $m = -1$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$. В первом случае он пришел к ряду (13), во втором — к ряду

$$\left(1+x\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots . \quad (17)$$

Здесь, как и при любом рациональном m, сумма биномиального ряда (при $-1 \leqslant x \leqslant 1$) дает арифметическое значение радикала. При $m = -\frac{1}{2}$ имеем:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \cdots . \quad (18)$$

Этот ряд сходится при $(-1 < x \leqslant 1)$. Однако результаты Ньютона в этом, как и в других вопросах анализа, были, как известно, опубликованы намного позже их получения автором. Так называемый *биномиальный ряд*, связанный с именем Ньютона, имеет следующий вид:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots +$$

$$+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n+\dots, \qquad (19)$$

при этом m — любое, отличное от нуля вещественное число. Этот ряд сходится при $|x|<1$, т. е. при $-1<x<1$.

Доказательство разложения (19) для любого вещественного m было дано Эйлером.

Одним из способов разложения в ряды, применявшихся Ньютоном, было *обращение* ряда; например, исходя из логарифмического ряда

$$x=\ln(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\dots,$$

в котором x разложен по степеням y, он устанавливает обратное разложение y по степеням x, получая:

$$y=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots,$$

или

$$1+y=e^x=1\,\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots, \qquad (20)$$

который представляет собой *показательный* ряд, он сходится для любого x.

Заменив в (18) x на $-x^2$, найдем:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\frac{35}{128}x^8+\dots. \qquad (21)$$

Этот ряд Ньютон проинтегрировал почленно, получив:

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+$$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{x^9}{9}+\dots. \qquad (22)$$

Ряд сходится на отрезке $[-1, 1]$.

Исходя из этого разложения дуги, Ньютон способом обращения приходит к разложению синуса:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}-\dots. \qquad (23)$$

Он же вывел и ряд

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}-\dots. \qquad (24)$$

В «Анализе с помощью уравнений с бесконечным числом членов» Ньютон, решая уравнения с помощью рядов, занимается

и вопросом сходимости ряда[1]. Вообще же, поскольку он разлагал в ряды известные выражения, вопрос о сходимости ряда он затрагивал редко.

Вслед за Меркатором и Ньютоном бесконечными рядами занимался шотландский математик Джемс Грегори, применявший их при вычислении площадей. В 1668 г. он вывел формулу приближенного интегрирования (позже вновь найденную английским математиком Т. Симпсоном), а в 1671 г. — следующий ряд:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} - \cdots . \quad (25)$$

Ряд этот сходится на отрезке $[-1, 1]$. Из него, полагая $x = 1$, получается так называемый *ряд Лейбница*:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots . \quad (26)$$

Лейбницем этот ряд был опубликован в 1682 г. и до недавнего времени считался первым в истории математики разложением в ряд числа π. Однако за последние годы было установлено[2], что еще в XV—XVI вв. южноиндийские ученые, в том числе Нилаканта, исходя из задачи приближенного вычисления π, получили разложение $\operatorname{arctg} x$ в степенной ряд, как и разложение (26), и словесно формулировали правила разложения в степенные ряды синуса и косинуса. Эти ученые предвосхитили и некоторые другие результаты, открытые в XVII в. европейскими учеными, однако эти изолированные и ограниченные в пределах нужд вычисления π инфинитезимальные исследования никакого дальнейшего развития в Индии не получили. Используя метод неопределенных коэффициентов, Лейбниц переоткрыл некоторые из результатов Ньютона независимо от последнего. Несмотря на то что Лейбниц применяет термин «сходящиеся» в отношении рядов, в понятии сходимости у него нет ясности. Так, например, положив в (13) $x = 1$ и получив в первой части

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots , \quad (27)$$

он считает, что этот ряд сходится и что его сумма равна $\frac{1}{2}$.

Ученики Лейбница — братья Бернулли впервые обратили внимание на то, что

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0, \quad (28)$$

---

[1] См.: Ньютон И. Математические работы. М.; Л., 1937.

[2] См.: Бахмутская Э. Я. Бесконечные ряды в работах южноиндийских математиков XV—XVIII столетий. Из истории естествознания и техники в странах Востока. М., 1960, сб. II и Степенные ряды для $\sin\theta$ и $\cos\theta$ в работах индийских математиков XV—XVIII вв. М., 1960, вып. XIII.

где u_n — общий член ряда — является необходимым, но недостаточным условием сходимости ряда. В качестве примера приводится гармонический ряд, для которого хотя и выполняется условие (28), «сумма — как они доказывают — бесконечна». Братья Бернулли доказали расходимость не только гармонического, но и других рядов с неограниченно убывающими членами. Факт этот оказался поразительным в ту эпоху.

Еще меньше внимания было обращено на вопросы сходимости рядов в XVIII в. Начало учения о бесконечных рядах, относящееся к XVII в., было в основном связано со стремлением представить функцию с помощью рациональных выражений, что облегчало выполнение операции интегрирования, которой пользовались для вычисления площадей и объемов. Это обстоятельство нередко заставляло ученых исследовать сходимость разложений для определенных значений аргумента. В дальнейшем, однако, все чаще стали применять полученные ряды для всех значений аргумента. Математики XVIII в. свободно оперировали с расходящимися рядами, что приводило порой к парадоксам и нелепостям. Так, например, многие считали, что ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \tag{27}$$

имеет сумму S, равную $\frac{1}{2}$, на основании такого рассуждения: пусть

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = S, \tag{28}$$

перенесем первый член в правую часть и получим:

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = S - 1.$$

Ряд, стоящий в левой части этого равенства, отличается от первоначального лишь знаками его членов, значит, его сумма будет $-S$; итак,

$$-S = S - 1, \quad \text{или} \quad S = \frac{1}{2}.$$

Другие мотивировали этот результат тем, что рассматриваемый ряд происходит от разложения $\frac{1}{1+x}$ при $x = 1$. Любопытно отметить, что, как часто бывает в периоды возникновения временных кризисов в обосновании науки, и на сей раз нашлись идеалисты, толковавшие вещи на свой лад. Так, например, итальянский математик Гуидо Гранди, указав, что, с одной стороны, сумма ряда (27) равна $\frac{1}{2}$, а с другой, если сгруппировать члены ряда попарно, то сумма эта равна нулю, утверждал, что вытекающее отсюда равенство $0 = \frac{1}{2}$ подтверждает религиозную догму о том, что бог создал мир из ничего... Несмотря на то что еще в 1715 г. француз-

ский математик Пьер Вариньон предостерег математиков против безоговорочного перенесения на бесконечные ряды свойств многочленов (конечных рядов), заявив, что несходящиеся ряды непригодны для вычислений, внимание математиков XVIII в., в первую очередь Эйлера, было обращено на практику применения рядов, на формальную разработку теории рядов.

Все рассмотренные нами выше ряды расположены по степеням x и поэтому носят название *степенных рядов*. Это важнейшие для практики функциональные ряды. Их общий вид таков:

$$\sum_0^\infty a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \qquad (29)$$

или, заменяя x на $x - x_0$, где x_0 — постоянная,

$$\sum_0^\infty a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots. \qquad (30)$$

Практическая ценность степенных рядов состоит в том, что если некоторые многочлены выразить в виде отрезков, то суммирование ряда явится удобным средством для приближенных вычислений. Вот почему большое значение имеет разработка общего метода разложения заданной функции в степенной ряд. Такой метод был открыт в 1712 г. учеником Ньютона — Бруком Тейлором и опубликован в его труде «Прямой и обратный метод приращений» (1715). В современных символах результат Тейлора можно записать так:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots. \qquad (31)$$

Значение этого открытия было оценено по достоинству лишь после того, как другой английский математик, Колин Маклорен, изложил в своем «Трактате о флюксиях» (1742) более простой вывод формулы Тейлора. Ряд (31) в настоящее время иногда неправильно называют «рядом Маклорена». Ряд Тейлора в общем виде можно записать и следующим образом:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x)}{2!} (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \cdots. \qquad (32)$$

Математики XVIII в. считали, что любая непрерывная функция дифференцируема и, значит, разложима в ряд Тейлора; их интересовала главным образом оценка погрешности, совершаемой, если оборвать (32) на $(n + 1)$-м члене, оценка разности r_n между $f(x)$ и суммой $n + 1$ членов ряда Тейлора, которую обозначим через $P_n(x)$. Для этой разности $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$, названной «ос-

татком ряда Тейлора», Лагранж вывел в 1799 г. следующее выражение:

$$r_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{33}$$

где ξ — некоторое число, лежащее между x_0 и x, т. е. $\xi = x_0 + \Theta(x - x_0)$, $0 < \Theta < 1$.

Другое выражение для остатка дал в первой четверти XIX в. О Коши, который, впрочем, привел и первый пример функции, а именно $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ при добавочном условии $f(0) = 0$, обладающей для значения $x = x_0 = 0$ производными любого порядка, но тем не менее не разлагаемой в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$, действительно, все эти производные равны нулю, в то время как функция $f(x)$ нигде, кроме $x = 0$, в нуль не обращается. Тогда же был установлен следующий критерий: необходимым и достаточным условием разложимости функции в ряд Тейлора является стремление к нулю при $n \to \infty$ остатка ряда Тейлора, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \tag{34}$$

Функция $f(x)$, разлагающаяся в ряд, расположенный по степеням $x - x_0$, была названа аналитической в точке x_0. На основе (32) и (33) можно коротко записать так называемую «формулу Тейлора с остаточным членом»:

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x), \tag{35}$$

где $P_n(x)$ представляет собой многочлен n-й степени, а $r_n(x)$ — так называемый *остаточный* или *дополнительный* член в форме Лагранжа. Наличие в (35) остаточного члена r_n и отличает ее от формулы Тейлора для многочлена. На основе ряда Тейлора можно получить все выше рассмотренные нами и другие степенные ряды, учитывая при этом условия сходимости рядов.

Учение о степенных и других бесконечных рядах достигло в XVIII в. большого развития главным образом благодаря трудам Л. Эйлера. Он не только определил суммы большого числа бесконечных рядов, но и получил важнейшие результаты в *теории* рядов, открыв так называемую «формулу суммирования Эйлера—Маклорена» и преобразование рядов, носящее его имя, и ввел новые типы рядов, например тригонометрические. Он широко применял ряды к исследованию свойств функций, а также к вопросам алгебры и теории чисел. Для разложения рациональных функций Эйлер, как и Ньютон, делил числитель на знаменатель или применял метод неопределенных коэффициентов. Он широко пользовался биномом Ньютона и рядом Тейлора для представления бесконечными рядами иррациональных, тригонометрических и других функций. Эйлер занимался также рядами с комплексными членами. Исходя из показательного ряда (20) и вводя степень с

мнимым показателем $x = iy$, он получил:

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right). \quad (20)$$

Сравнивая этот ряд с рядами (23) и (24), Эйлер и пришел к знаменитым своим формулам:

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y.$$

Заменяя здесь y на $-y$, будем иметь аналогично:

$$e^{-yi} = \cos y - i \sin y.$$

Почленное сложение и вычитание этих двух соотношений дают:

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}.$$

Особенно резко возражал против пользования расходящимися рядами Даламбер. Однако сама идея Эйлера о целесообразности применения расходящихся рядов в математике оказалась очень ценной. Когда на пороге XX в. была создана строгая теория расходящихся рядов, выяснилось, что своими методами суммирования рядов Эйлер в известной мере предвосхитил современные идеи[1].

Понятия «сходящиеся» и «расходящиеся» ряды в XVIII в. не были точно определены и порой разными математиками понимались по-разному. Со степенными рядами оперировали вообще как с многочленами. Почти все математики считали, что любая функция разложима в ряд Тейлора, при этом редко учитывался остаточный его член. Определение сходимости рядов на основе предела последовательности частичных сумм ряда вошло в науку лишь после работ Больцано (1817), Коши (1821) и Абеля (1826). Так называемый «признак Даламбера» представляет собой на самом деле теорему, впервые высказанную и доказанную Коши, в то время как сформулированное Даламбером по тому же вопросу предложение критерием сходимости служить не может.

Разложение в степенной ряд применяется для большинства встречающихся в приложениях функций. С точки зрения прикладной математики большое значение имеют и *тригонометрические* ряды. Это ряды вида:

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots$$

$$\cdots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \cdots,$$

или короче

---

[1] См. предисловие С. Б. Стечкина в книге Г. Харди «Расходящиеся ряды» (М., 1951).

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Все члены этого ряда являются периодическими функциями с периодом 2π.

Возникшее из знаменитой дискуссии между Эйлером, Д. Бернулли, Даламбером и Лагранжем, связанной с изучением колебаний струны, учение о тригонометрических рядах было в дальнейшем развито Фурье, Риманом, Дирихле и Лобачевским. Важный вклад в разработку теории тригонометрических рядов внесли С. Н. Бернштейн, А. Н. Крылов, Н. Н. Лузин, Н. К. Бари, Д. Е. Меньшов и другие советские ученые.

Д. Бернулли

§ 19. КРАТКИЙ ОБЗОР ДАЛЬНЕЙШЕГО РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Среди многих классических результатов исследования Эйлером обыкновенных дифференциальных уравнений можно назвать решение неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами посредством понижения его порядка, решение некоторых видов линейных уравнений с переменными коэффициентами, например дифференциального уравнения, позже названного «уравнением Бесселя»:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)\, y = 0,$$

где n — любое число; исследование так называемого «уравнения Риккати»:

$$y' = P(x)\, y^2 + Q(x)\, y + R(x),$$

решение которого вообще не может быть выражено в квадратурах. Л. Эйлер ввел термины «частное решение» и «общее (полное) решение», указав на то, что общим решением обыкновенного дифференциального уравнения порядка n является линейная комбинация его n частных решений. Он значительно расширил использование метода «интегрирующего множителя», эпизодическое применение которого восходит к И. Бернулли. Решение дифференциальных уравнений с помощью точных элементарных формул возможно лишь в сравнительно немногих случаях. Поэтому часто приходится применять приближенные методы интегрирования, или, как говорят, *численное интегрирование*. Эйлер разработал первый метод приближенного решения обыкновенных дифференциальных урав-

нений и численно интегрировал уравнения первого и второго порядка.

Многие глубокие исследования в области обыкновенных дифференциальных уравнений, вызванные, в частности, вопросами динамики и относящиеся к особым решениям, к решению *систем* дифференциальных уравнений и т. п., принадлежат Лагранжу, Даламберу и другим математикам того времени.

Начав свое развитие внутри дифференциального и интегрального исчисления, теория дифференциальных уравнений постепенно превратилась в XVIII в. в особую математическую ветвь и стала мощным орудием исследования в механике и дифференциальной геометрии. Основным ее содержанием в эту эпоху была разработка различных частных методов интегрирования определенных типов обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем развитии теории дифференциальных уравнений (в XIX—XX вв.) на первый план выступают уравнения в *частных производных*, вопросы существования и другие общие проблемы.

Что мы понимаем под частной производной?

В функции z двух независимых переменных

$$z = f(x, y)$$

можно предположить, что x (или y) изменяется, в то время как y (или x) остается постоянным. Производная от z по x, когда y не изменяется, называется *частной производной* от z по x и обозначается символом $\frac{\partial z}{\partial x}$, или $\frac{\partial f}{\partial x}$, $f'_x(x, y)$, $D_x f$. Аналогично определяется частная производная от z по y, обозначаемая $\frac{\partial z}{\partial y}$, или $\frac{\partial f}{\partial y}$, $f'_y(x, y)$, $D_y f$. Сказанное распространяется на функции трех и более независимых переменных.

Дифференциальные уравнения различаются не только по наивысшему порядку производных, в него входящих, но и по числу независимых переменных. В случае одного независимого переменного имеем обыкновенное дифференциальное уравнение, при большем числе их — *дифференциальное уравнение в частных производных*. Например,

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

есть дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Многие задачи математической физики приводят к уравнениям в частных производных второго порядка, среди них и знаменитая задача нахождения закона, по которому под влиянием силы натяжения колеблется струна, выведенная из положения равновесия:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0. \qquad (1)$$

Это *уравнение колебания струны*, вокруг которого среди ученых в XVIII в. разгорелся и долго продолжался спор о понятии функции[1].

А. Пуанкаре

Подобно тому как обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет бесконечное множество решений, зависящих от произвольных постоянных, определяемых по заданным начальным условиям, решение уравнения в частных производных n-го порядка зависит от n производных *функций*. Это впервые заметил Даламбер при исследовании уравнения колебания струны. Эйлер же довел это исследование до конца, связав произвольные функции с начальными условиями задачи. Большое значение имели и работы современника Эйлера — Даниила Бернулли. Однако свого расцвета математическая физика и вместе с ней теория дифференциальных уравнений в частных производных достигла в XIX в. в трудах Пуассона, Фурье, Коши, Остроградского, Ковалевской и других ученых.

В конце XIX в. проблемы астрономии и небесной механики привели к созданию А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым так называемой качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, дающей возможность по самим уравнениям устанавливать различные свойства их решений без интегрирования.

Александр Михайлович Ляпунов (1857—1918), крупнейший представитель петербургской математической школы, идущей от П. Л. Чебышева, создал строгую теорию устойчивости равновесия и движения механических систем. К математической физике относится и большая часть работ ученика А. Ляпунова, выдающегося русского математика Владимира Андреевича Стеклова (род. 9/I 1864 г. по н. ст., умер 30/V 1926 г.), имя которого присвоено Математическому институту Академии наук СССР. Изучению дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа, имеющих большое значение в задачах физики и механики, посвятил часть своих трудов академик Сергей Натанович Бернштейн.

В Советском Союзе теория дифференциальных уравнений достигла нового расцвета в связи с глубокими исследованиями в области аэродинамики, гидродинамики, теории упругости и других разделов математического естествознания и техники. В теории дифференциальных уравнений ныне применяются методы современной математики, в том числе теории функций действительного переменного, топологии и функционального анализа. В последнее

[1] См. ч. I, § 1; 5.

В. А. Стеклов

время немало ученых, в том числе и советские математики (Л. А. Люстерник и др.), разрабатывают теорию конструкций машин для интегрирования дифференциальных уравнений. Блестящих результатов в теории дифференциальных уравнений и ее приложений достигли А. А. Андронов, Н. Н. Боголюбов, И. Н. Векуа, Н. М. Гюнтер, Л. В. Канторович, М. В. Келдыш, А. Н. Колмогоров, М. Г. Крейн, М. А. Лаврентьев, Н. И. Мусхелишвили, В. В. Немыцкий, И. Г. Петровский, Л. С. Понтрягин, В. И. Смирнов, С. Л. Соболев, В. В. Степанов, А. Н. Тихонов, А. Я. Хинчин и ряд других советских ученых.

Глава VI.

ГЕОМЕТРИЯ

... Из ничего я создал целый мир!
Я. Бояй

§ 20. ИЗ ИСТОРИИ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

... Чем Коперник был для Птолемея, тем был Лобачевский для Евклида...
В. Клиффорд

Два тысячелетия бесплодных усилий и крушения всех попыток (в том числе и своей собственной, основанной на методе приведения к абсурду) доказать V постулат привели Лобачевского к мысли о том, что этот постулат не зависит от других аксиом евклидовой геометрии, т. е. из них не вытекает, и поэтому его доказать нельзя.

Но если V постулат не зависит от других аксиом, то, допуская все другие аксиомы (абсолютной геометрии), мы можем принять или не принять евклидов постулат. В первом случае мы получаем известную классическую евклидову геометрию, названную Лобачевским «употребительной». Если же вместо евклидовой аксиомы параллельности принять другую, ей не эквивалентную, получим новую, неевклидову геометрию. Лобачевский и сформулировал новую аксиому параллельных, прямо противоположную аксиоме Евклида: «*Через точку вне прямой можно провести не только одну прямую, не встречающую данной прямой, а по крайней мере две*». Заменив этой аксиомой V постулат Евклида, Лобачевский разработал свою неевклидову геометрию, которая оказалась так же логически безупречной, правильной, как и геометрия Евклида.

Если из точки C вне прямой AB (рис. 63) опустить на нее перпендикуляр CD и построить перпендикуляр CN к CD, то без помощи аксиомы параллельных доказывается, что $NN' \parallel AB$. (Докажите!)

Постулат Евклида утверждает, что из всех прямых плоскости ABC, проходящих через точку C, только одна прямая $N'N$ не встречает прямой AB. Отказываясь от этой аксиомы, Лобачевский допускает, что через точку C проходит по крайней мере еще одна прямая CL, не пересекающая AB.

Аксиома Лобачевского нам кажется на первый взгляд странной, так как противоречит нашим установившимся геометрическим представлениям. Однако при более глубоком анализе вопроса мы должны признать, что в отличие от других аксиом, касающихся фигур ограниченных размеров, аксиома параллельности Евклида относится к неограниченной прямой и никогда не может быть проверена с помощью непосредственного эксперимента, который может быть проведен лишь в ограниченной части пространства. Если, например, взять угол NCL достаточно малым, то отрезки CL и AB не пересекутся даже на расстоянии, выходящем за пределы нашей планеты. И вот как раз в пределах ограниченной части плоскости, как бы эта часть ни была велика, можно провести через данную точку множество прямых, не пересекающих данной прямой. Внутри круга любого конечного радиуса существует множество «прямых» (т. е. хорд), проходящих через точку C и не встречающих «прямой» AB, например CL, CM и др. (рис. 64).

Таким образом, если отречься от всяких предубеждений, нет никакого основания считать аксиому Лобачевского «хуже» аксиомы Евклида в смысле ее соответствия физической реальности. Кажущееся преимущество евклидовой аксиомы состоит в том, что ее содержание соответствует нашим привычным представлениям. Эти представления, однако, основаны на повседневном опыте в пределах сравнительно незначительной части вселенной. Между тем в истории науки известны факты, когда более точно поставленные эксперименты вызывали необходимость изменения основанных на наглядности гипотез и аксиом и замены их новыми гипотезами, которые лучше соответствуют объективному материальному миру.

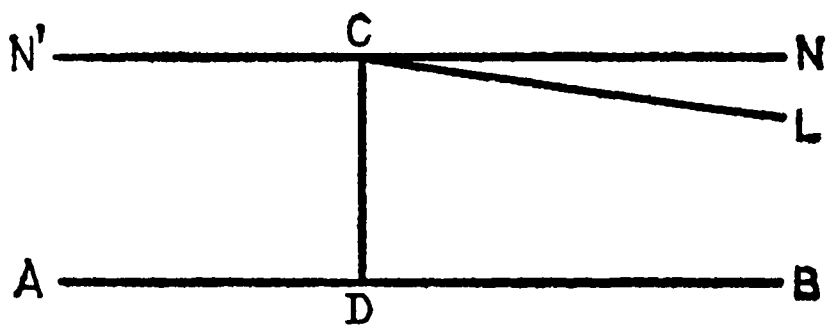


Рис. 63.

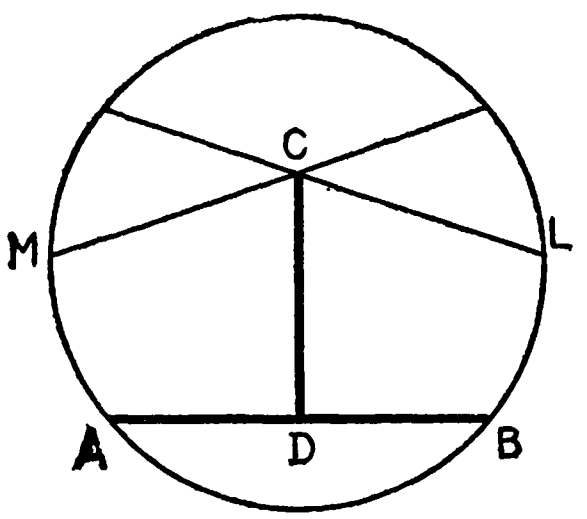


Рис. 64.

В Ф Каган

Ведь господствовало же у древних представление о том, что Земля плоская. В свое время казалась невероятной гелиоцентрическая гипотеза Коперника для всех людей, веками сжившихся с идеями геоцентрической гипотезы Птолемея. Известный английский математик В. Клиффорд так и писал: «Чем Коперник был для Птолемея, тем был Лобачевский для Евклида. Между Коперником и Лобачевским любопытная параллель. Коперник и Лобачевский — оба славяне по происхождению. Каждый из них произвел революцию в научных идеях, воззрениях, и обе эти революции имеют одно и то же значение.

Причина их громадного значения заключается в том, что они суть революции в нашем понимании космоса...». По поводу этого сравнения советский ученый профессор В. Ф. Каган писал, что «истины, открытые Лобачевским, были гораздо глубже сокрыты, более неожиданны; их выявление требовало гения более высокого ранга». Гелиоцентрическая система Коперника только по-иному представила расположение и движение небесных тел в пространстве. Система же Лобачевского дала новое представление о самом пространстве.

Мы отклонились от основной нашей темы и говорили о геометрии как о части физики. Но для нас важнее математическая сторона геометрии, ее логическая структура. О связи между геометрией Лобачевского и действительностью поговорим позже; пока же посмотрим, какие логические следствия вытекают из его аксиомы.

1) Если прямые CN и CL не встречают прямой AB, то и любая прямая CM, проходящая через точку C внутри вертикальных углов NCL и $N'CL'$, также не встретит прямой AB (рис. 63, 64). Отсюда первое следствие аксиомы Лобачевского: *через точку* C вне прямой AB *плоскости* ABC проходит бесчисленное множество прямых, не пересекающихся с прямой AB.

2) Если соединить (рис. 15) какую-либо точку прямой DB с точкой C, получим прямую, допустим CK, проходящую через точку C и встречающую прямую AB. Итак, все прямые, проходящие через точку C внутри прямого угла NCD, разбиваются на две категории, на два класса: встречающие прямую AB (их Лобачевский называет «сходящимися» с AB) и не встречающие прямую AB (названные Лобачевским «расходящимися» с AB). Любая прямая первой категории образует с перпендикуляром CD угол, меньший угла, образованного перпендикуляром CD с любой прямой второй категории. Вращаясь непрерывно около точки C в направлении против часовой стрелки, прямая CK на известном этапе,

допустим в положении CL, перестанет пересекать AB и из сходящейся прямой перейдет в категорию расходящихся с AB прямых. Эта *предельная прямая* CL, служащая переходной прямой, граничной, отделяющей сходящиеся от расходящихся прямых, и названа Лобачевским параллельной к прямой AB из точки C. Итак, параллельная CL — это не просто расходящаяся прямая, а первая, граничная расходящаяся, т. е. такая, что любая прямая, проходящая через точку C внутри угла, образованного параллельной CL и перпендикуляром CD, является сходящейся прямой, а всякая прямая, проходящая внутри угла LCN, будет расходящейся с прямой AB. Угол DCL, образованный параллельной CL с перпендикуляром CD, называют углом параллельности.

В силу симметрии относительно перпендикуляра CD внутри прямого угла $N'CD$ получим картину, аналогичную той, которую мы имеем в угле NCD, т. е., построив $\angle DCF = \angle DCL$, получим прямую CF, также параллельную прямой AB слева от перпендикуляра CD. Итак, через точку C, лежащую вне прямой AB, проходят в плоскости ABC две прямые, параллельные прямой AB, в одну и в другую сторону этой прямой. Все прямые, проходящие внутри вертикальных углов, образованных параллельными прямыми LL', GG' (в том числе и евклидова «параллельная» $N'N$), расходятся с AB; все остальные прямые, проходящие через точку C, сходятся с прямой AB.

Следовательно, а) две прямые как AB и $N'N$, имеющие общий перпендикуляр CD, расходятся; б) если вращать прямую $N'N$ около точки C, допустим по часовой стрелке, а прямую AB около точки D в том же направлении так, чтобы углы, образованные этими прямыми с пересекающей их прямой CD, оставались равными, то прямые AB и $N'N$ остаются расходящимися, т. е. две прямые, образующие при пересечении с третьей прямой равные соответственные углы, расходятся.

3) Из предыдущего изложения вытекает, что на параллели Лобачевского различается *направление параллельности*. Прямая CE параллельна прямой AB в направлении или в сторону от A к B; прямая CF параллельна той же прямой AB в направлении или в сторону BA (от B к A. Рис. 65).

Несмотря на коренные отличия понятия параллельности у Лобачевского от одноименного понятия в геометрии Евклида, можно доказать, что «параллельность» в смысле Лобачевского тоже обладает свойствами взаимности или симметрии (если прямая a параллельна прямой b, то b параллельна a) и транзитивности (если a и b параллельны c, то a и b параллельны между собой).

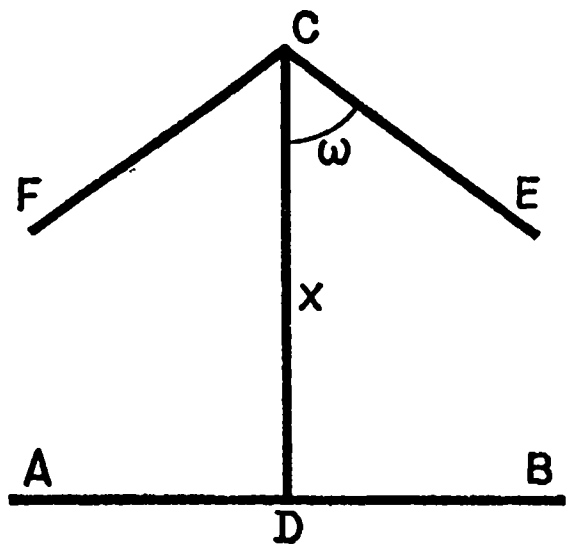


Рис. 65.

Далее можно доказать, что две взаимно параллельные прямые асимптотически сбли-

Н. И. Лобачевский

ду собой. Это четвертый признак равенства треугольников в геометрии Лобачевского.

Таким образом, в плоскости Лобачевского треугольник вполне определяется своими углами. Стороны и углы зависят друг от друга. Отсюда ясно, что в геометрии Лобачевского нет подобных фигур. Действительно, ведь из существования подобных фигур вытекает евклидова аксиома параллельности (доказательство Валлиса).

6) *Площади.* Мы уже знаем, что, чем меньше размеры фигур, которые мы изучаем, тем ближе мы находимся к геометрии Евклида, в которой угловой дефект треугольника равен нулю. Доказывается следующая теорема: площадь треугольника прямо пропорциональна его угловому дефекту. Чем меньше размеры фигуры, тем меньше ее дефект, тем меньше и площадь. Чем больше размеры треугольника (чем больше мы удаляемся от геометрии Евклида), тем больше его дефект, тем больше и площадь. Однако угловой дефект по определению не может превзойти $2d$, следовательно, и площадь треугольника в геометрии Лобачевского не может стать больше некоторой определенной, конечной величины.

Таковы некоторые из основных идей и фактов геометрии Лобачевского[1].

После работы «О началах геометрии» появились в свет и другие произведения Лобачевского по неевклидовой геометрии: «Воображаемая геометрия» (1835), «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (1836), «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (опубликованные в «Ученых записках Казанского университета» в 1835—1838 гг.), «Геометрические исследования по теории параллельных» (опубликованы впервые в 1840 г. в Берлине на немецком языке). Однако идеи Лобачевского были настолько революционными и до того опередили свой век, что не могли быть понятыми даже крупными математиками того времени. Поэтому новая геометрия не была признана современниками, была встречена с полным равнодушием и даже с иронией. Ее многие считали сплошной фантазией, а ее автора — чудаком или даже невеждой. Одинокий Лобачевский не отказался от своих идей. Он твердо был убежден в логической правильности

---

[1] Для более подробного ознакомления с геометрией Лобачевского см.: Каган В. Ф. Основания геометрии. М., 1949—1956, ч. I—II; Каган В. Ф. Лобачевский. М.; Л., 1948; Лобачевский Н. И. Полн. собр. соч. М.; Л., 1951.

неевклидовой геометрии. Чтобы можно было это доказать, Лобачевский предпринимал астрономические наблюдения и производил измерения углов космических треугольников, стороны которых измерялись расстояниями от Земли до небесных тел, в надежде установить, равна ли сумма углов треугольника $2d$ или она меньше двух прямых углов. Однако измерения не могли дать определенного результата в силу их приближенного характера. Лобачевский всю жизнь искал оправдания своей геометрии в механике и астрономии и не переставал верить, что торжество его идей неминуемо.

В 1855 г. умирает Гаусс, единственный крупный ученый, сумевший оценить Лобачевского по достоинству при его жизни, хотя и не решившийся выступить публично в защиту новой геометрии. В том же году Лобачевский, которого постоянное умственное напряжение и тяжелые переживания, перенесенные в борьбе за признание своих идей, довели до потери зрения, диктует последнее свое произведение — «Пангеометрию»[1]. Лобачевский умер в 1856 г. непризнанным, почти забытым.

Не получил признания при жизни и гениальный венгерский математик Янош Бояй (1802—1860). Его «Appendix», содержащий основы неевклидовой геометрии, изложен исключительно сжато и схематично — вот одна из причин, сделавших это классическое произведение недоступным для его современников[2].

Жизнь и творчество Яноша Бояй тесно связаны с деятельностью его отца, математика Фаркаша Бояй (1775—1856). Большую часть своей жизни отец и сын провели в родной Трансильвании (ныне область на северо-западе Румынии). Еще будучи студентом Геттингенского университета, Бояй-отец дружил с юным Гауссом, в беседах с которым он часто обсуждал проблему V постулата. Впоследствии Ф. Бояй много лет занимался исследованиями в области теории параллельных линий, которые, однако, его не привели к желаемому результату. С 1804 г. и почти до конца своей жизни он работал в должности преподавателя математики, физики и химии в евангелистско-реформистской коллегии небольшого трансильванского города Марош-Вашархей (ныне Тыргу-Муреш). За это время он опубликовал здесь некоторые свои работы, в том числе теорему о равновеликости и равносоставленности многоугольников, включив ее в важнейший свой труд «Tentamen» («Опыт»). Более полное заглавие этого труда, написанного на латинском языке, гласит в русском переводе: «Опыт введения юных учащихся в начала чистой математики, элементарной и высшей» (1832). В виде приложения именно к этому труду и был опубликован «*Appendix*» Яноша Бояй.

Одаренность Яноша и его страстный интерес к математике и музыке сказывались еще в детстве. В возрасте 10 лет он уже имел

---

[1] Греческое слово «пан» в сложных словах означает «все», «пангеометрия» — «всеобщая геометрия».

[2] См.: Бояй Я. Appendix. М.; Л., 1950.

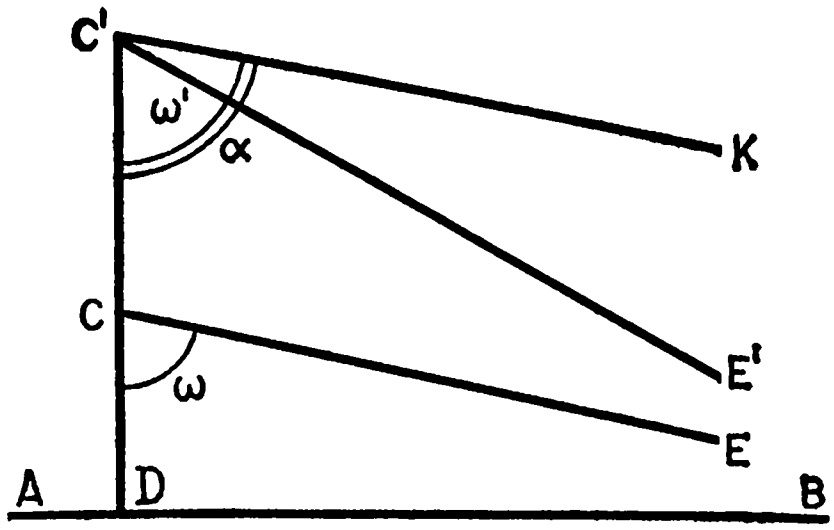


Рис. 66.

жаются между собой в одном направлении (направлении параллельности) и неограниченно друг от друга удаляются в другом, противоположном направлении.

Приведем некоторые другие понятия и факты геометрии Лобачевского.

1) *Функция Лобачевского*. Мы видели, что через любую точку C в плоскости CAB проходят две направленные параллели к прямой AB (CE и CF), симметрично расположенные относительно перпендикуляра CD (рис. 65). Угол параллельности, образованный каждой из этих параллелей с CD, является острым. Его величина не постоянна и зависит от расстояния CD (в геометрии Евклида угол параллельности всегда прямой). То, что угол параллельности острый, вытекает непосредственно из аксиомы Лобачевского. В изменении этого угла с изменением расстояния CD можно убедиться путем следующих рассуждений (рис. 66).

Пусть $C'D > CD$, CE параллельна AB, в точке C угол параллельности — ω. Пусть далее прямая $C'E'$ параллельна AB, в точке C' угол параллельности — ω'. В силу свойства транзитивности CE параллельна $C'E'$. Ясно, что $\omega \neq \omega'$.

Действительно, если допустить, что $\omega = \omega'$, то следует также допустить, что $C'E'$ и CE — расходящиеся прямые, как было показано выше, а это неверно.

Построим $C'K$, образующую с CD угол $\alpha = \omega$, ясно, что $\omega' < \alpha$, так как параллель $C'E'$ ближе к перпендикуляру CD, чем расходящаяся $C'K$. Итак, $\omega' < \omega$; отсюда следует, что угол параллельности убывает по мере удаления от прямой AB; чем ближе точка C к прямой AB, т. е., чем короче перпендикуляр CD, тем больше угол параллельности. Если обозначить расстояние точки C от прямой AB, т. е. длину перпендикуляра CD через x, то можно сказать, что угол параллельности есть функция от x, названная «функцией Лобачевского» и обозначаемая $\Pi(x)$. Это монотонно убывающая функция. При изменении аргумента x от 0 до ∞ функция $\Pi(x)$ непрерывно изменяется соответственно от $\frac{\pi}{2}$ до 0. Таким образом,

$$\lim_{x \to 0} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to \infty} \Pi(x) = 0.$$

При $x \to 0$, иными словами, если оставаться в пределах сравнительно небольших расстояний, то угол параллельности мало отличается от $\frac{\pi}{2}$, т. е. от того значения, которое он имеет в евкли-

довой геометрии. Это означает, что геометрия Лобачевского не противоречит, не исключает геометрии Евклида; последнюю можно рассматривать как частный, предельный случай более общей геометрии — геометрии Лобачевского. Реальный смысл предельного перехода (при $x \to 0$) от геометрии Лобачевского к геометрии Евклида состоит в том, что физика изучает в конечном счете только ограниченную, сравнительно небольшую часть пространства. Вот почему в окружающей нас среде (даже в пределах нашей планеты) свойства физического пространства приблизительно таковы, какими мы их знаем из евклидовой геометрии, но для *всего* пространства, для мира звезд, для вселенной в целом, они иные, неевклидовы.

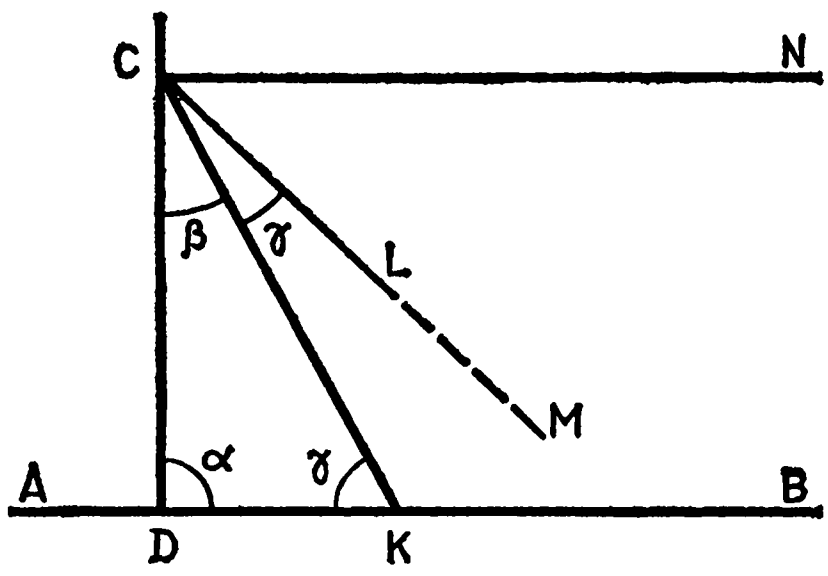


Рис. 67.

2) *Сумма углов треугольника меньше* $2d$. Это предложение эквивалентно аксиоме Лобачевского, т. е. из него вытекает эта аксиома, и наоборот. Для примера докажем первое.

Пусть (рис. 67) в прямоугольном треугольнике CDK сумма углов $s = \alpha + \beta + \gamma < 2d$, $\alpha = d$, т. е. $\beta + \gamma < d$. Это значит, что внутри угла NCK можно построить $\angle LCK = \alpha (NC \perp CD)$.

Прямая CL не может пересечь прямой AB в какой-либо точке M, так как если бы это случилось, то угол DKC, внешний по отношению к треугольнику KCM, равнялся бы внутреннему, не смежному с ним углу треугольника KCM, что противоречит теореме абсолютной геометрии о внешнем угле треугольника. Итак, через точку C, кроме CN, проходит еще одна прямая — CL, не встречающая прямой AB; следовательно, верна аксиома Лобачевского. Разность $2d - s$, т. е. между $2d$ и суммой углов данного треугольника, называется, как мы уже знаем, *угловым дефектом* этого треугольника.

3) Предложение. *Сумма углов четырехугольника меньше* $4d$ вытекает из предыдущего. Отсюда следует, что в геометрии Лобачевского нет ни прямоугольников, ни квадратов. Вообще сумма углов n-угольника меньше $2d(n - 2)$.

4) Внешний угол треугольника больше суммы внутренних, с ним не смежных углов. Действительно, пусть δ — внешний угол треугольника, смежный с внутренним углом треугольника α, и пусть β и γ — остальные его внутренние углы; тогда

$$\alpha + \delta = 2d.$$

Следует, что $\delta > \beta + \gamma$.

5) Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то эти треугольники равны меж-

свои собственные музыкальные композиции, в 13 лет владел дифференциальным и интегральным исчислением, а в 15 лет выдержал экзамен на аттестат зрелости. В 1818 г. Янош отправился в Вену, где на протяжении четырех лет состоял студентом военно-инженерной академии. В 1823 г., окончив академию и получив звание офицера, Янош был отправлен на службу в трансильванский город Темешвар (ныне Тимишоара). Здесь, располагая достаточным временем, он всецело отдался математике и со страстным увлечением занялся исследованием проблемы V постулата, начатым еще в годы студенчества. В одном из своих писем, направленных в 1823 г. отцу, Янош сообщил, что хотя и не достиг еще цели, но получил замечательные результаты: «из ничего я создал целый новый мир».

Отец, на собственном опыте узнавший, сколько горя и разочарований может принести проблема V постулата, в своих трогательных письмах умолял сына отказаться от этих занятий. Вот выдержка из одного письма Фаркаша Бояй к сыну: «...ты не должен пытаться одолеть теорию параллельных линий на этом пути; я знаю этот путь, я проделал его до конца, я пережил эту беспросветную ночь, и всякий светоч, всякую радость моей жизни я в ней похоронил. Молю тебя: оставь в покое учение о параллельных линиях; ты должен его страшиться, как чувственных увлечений; оно лишит тебя здоровья, досуга, покоя — оно погубит всю радость жизни. Эта беспросветная мгла может поглотить тысячу ньютоновых башен, и никогда на земле не прояснится; никогда несчастный род человеческий не достигнет совершенной истины, даже в геометрии! Да хранит тебя бог от этого увлечения, которое тобой одолело. Оно лишит тебя радости не только в геометрии, но и во всей земной жизни».

Однако Янош продолжал свои исследования, добился цели и, тщательно отработав свои исследования, убедил почти ничего в них не понимавшего отца поместить их в качестве «Приложения» в конце «Тентамена». Работа была послана отцом на отзыв Гауссу. Последний, однако, вместо одобрения молодого венгерского математика в ответном письме от 6 марта 1932 г. к старому другу — писал главным образом о себе и о своих заслугах, а о работе Яноша — отозвался так: «... если я начну с того, что я ее не должен хвалить, то на мгновение ты поразишься, но я не могу поступать иначе: хвалить ее — значило бы хвалить самого себя, ибо все содержание этой работы, путь, по которому твой сын пошел, и результаты, которые он получил, почти сплошь совпадают с моими, которые я частично получил уже 30—35 лет тому назад. Я действительно этим крайне поражен.

Я имел намерение о своей собственной работе, кое-что из которой я теперь нанес на бумагу, при жизни ничего не публиковать. Большинство людей совершенно не имеют правильного понятия о том, о чем здесь идет речь; я встретил только очень немногих людей, которые с особенным интересом восприняли то, что я им об этом сообщал. Чтобы быть в состоянии это понять, надо снача-

ла живо ощутить то, чего, собственно, здесь недостает, а это большинству людей совершенно неясно. Но я имел намерение со временем нанести на бумагу все, чтобы эти мысли, по крайней мере, не погибли со мной. Я поэтому очень поражен тем, что я освобожден от этой необходимости, и меня очень радует, что именно сын моего старого друга таким удивительным образом меня предвосхитил».

Ответ Гаусса произвел на Яноша Бояй удручающее впечатление. Не зная о том, что приоритет открытия неевклидовой геометрии принадлежал уже с 1829 г. Н. И. Лобачевскому, он не поверил, что Гаусс пришел к тем же идеям независимо от него, Яноша Бояй. Он заподозрил Гаусса в намерении похитить у него приоритет великого открытия, ставшего для Яноша делом и смыслом всей его жизни. Эта мысль стала его преследовать днем и ночью. Молодой Бояй стал крайне раздражительным. Военная служба оказалась для него невыносимой, и в 1833 г. он вышел в отставку. С тех пор он всегда жил в материальной нужде.

В 1837 г. Яношу пришлось пережить новый тяжелый удар. Лейпцигское научное общество объявило конкурс с присуждением премии за лучшую работу на тему «О мнимых величинах». На присланную Яношем замечательную работу, в которой содержится идея о парах чисел, позволяющая обосновать теорию комплексных чисел, что по существу предвосхитило учение У. Гамильтона[1], изложенное в «Лекциях о кватернионах» (1853), жюри (в основном из-за некомпетентности лиц, входящих в него) дало несправедливый отрицательный отзыв. И эта неудача тяжело отразилась на психике Яноша Бояй. Продолжая интенсивно заниматься наукой, он поставил, однако, перед собой невыполнимую в то время задачу общего обоснования и строго логического построения геометрии. Безрезультатные поиски ухудшили моральное, физическое и душевное его состояние. Его переживания и отчаяние резко возросли, когда в его руки попало сочинение Н. И. Лобачевского на немецком языке «Геометрические исследования по теории параллельных линий». Янош высказал предположение, что Лобачевский — это всего лишь псевдоним, под которым скрывается Гаусс, похитивший у него приоритет открытия неевклидовой геометрии.

Материальная нужда и болезнь, одиночество, обиды, неудачи и нескончаемые тяжелые переживания окончательно сломили физические и духовные силы Яноша Бояй. Он скончался в 1860 г.

Когда в 60-х годах прошлого столетия была опубликована переписка Гаусса с его друзьями, ученые узнали, что Гаусс полностью разделял взгляды Лобачевского и Бояй и сам независимо от них пришел к тем же идеям. Особенно похвально отзывался Гаусс о Лобачевском, о котором он, например, 28 ноября 1846 г. так писал своему другу Шумахеру: «...недавно я имел случай вновь просмотреть книжку Лобачевского («Geometrische Untersuchungen

---

[1] См. гл. V, § 14; 5.

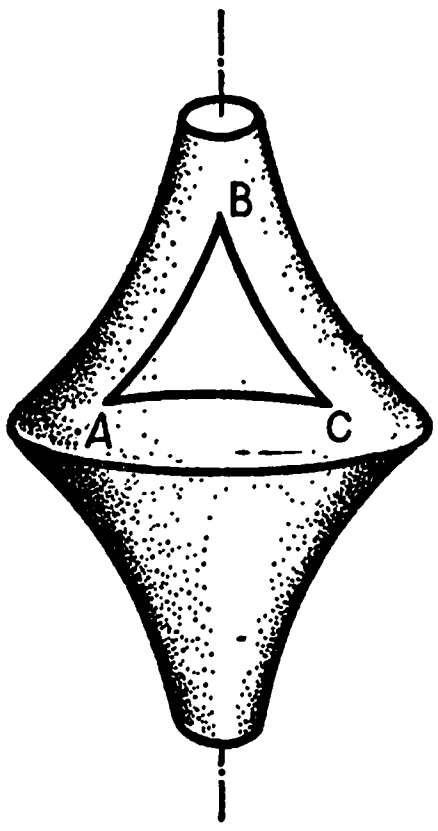


Рис. 68.

zur Theorie der Parallellinien». Berlin, 1840, в издательстве «Fincke», размером в 4 печатных листа). Она содержит основы той геометрии, которая должна была бы иметь место и была бы строго последовательной, если бы евклидова геометрия не была истинной. Некто Швейкарт назвал такую геометрию *звездной* (Astralgeometrie), Лобачевский называет ее *воображаемой геометрией.* Вы знаете, что я уже 54 года (с 1792 г.) имею то же убеждение (с некоторым позднейшим расширением, на котором не хочу здесь останавливаться); по материалу я таким образом в сочинении Лобачевского не нашел для себя ничего нового, но в его развитии автор следует другому пути, отличному от того, которым я шел сам; оно выполнено Лобачевским с мастерством, в чисто геометрическом духе. Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на эту книгу, которая, наверное, доставит Вам совершенно исключительное наслаждение».

После того как стало известно, что Гаусс считал геометрию Лобачевского логически вполне правильной, «неевклидова геометрия» (названная так именно Гауссом) привлекла к себе внимание многих математиков. Произведения Лобачевского и «Appendix» Бояй были переведены на французский, итальянский и другие языки. Однако выявилось много противников неевклидовой геометрии, которые относились к ней с недоверием, утверждая, что она представляет собой сплошную фантазию, нелепость которой рано или поздно будет обнаружена. Положение коренным образом изменилось, когда итальянский математик, профессор Римского университета Эудженио Бельтрами (1835—1900) нашел модель для неевклидовой геометрии, показав в своей работе «Опыт интерпретации неевклидовой геометрии» (1868), что наряду с плоскостями, на которых осуществляется евклидова геометрия, и сферическими поверхностями, на которых действуют формулы сферической геометрии, существуют и такие реальные поверхности, названные им псевдосферами (рис. 68), на которых частично осуществляется планиметрия Лобачевского. Известно, что сферу можно получить вращением полуокружности вокруг своего диаметра.

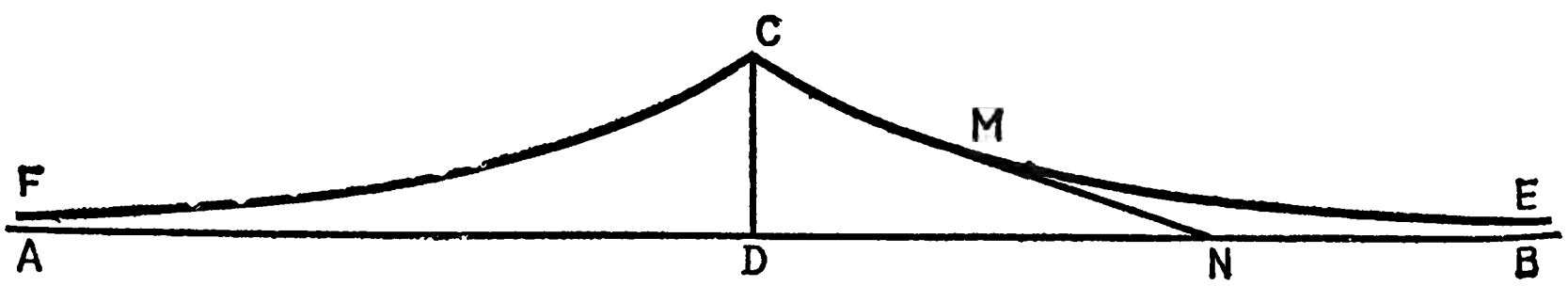


Рис. 69.

Подобно этому псевдосфера образуется вращением линии *FCE*, называемой трактриссой, вокруг ее оси *AB* (рис. 69).

Итак, псевдосфера — это поверхность в обыкновенном реальном пространстве, на которой выполняются многие аксиомы и теоремы неевклидовой планиметрии Лобачевского. Например, если начертить на псевдосфере треугольник, то легко усмотреть, что сумма его внутренних углов меньше $2d$. Стороны треугольника — это дуги псевдосферы, дающие кратчайшие расстояния между двумя ее точками и выполняющие ту же роль, которую выполняют прямые на плоскости; эти линии, называемые геодезическими, можно получить, зажав туго натянутую и натертую краской или мелом нить в вершинах треугольника.

Таким образом, для планиметрии Лобачевского была найдена реальная модель — псевдосфера. Формулы новой геометрии Лобачевского нашли конкретное истолкование. Ими можно было пользоваться, например, для решения псевдосферических треугольников.

Псевдосферу, которую мы назвали «моделью», Бельтрами назвал (как явствует из заглавия его вышеназванной работы) *интерпретацией* (истолкованием) неевклидовой геометрии на плоскости[1]. Впоследствии, с развитием и введением в математику аксиоматического метода, под интерпретацией (или моделью) некоторой системы аксиом стали понимать любое множество объектов, в которых данная система аксиом находит свое реальное воплощение, т. е. любую совокупность объектов, отношения между которыми полностью совпадают с теми, которые описываются в данной системе аксиом. При этом полагают, что если для некоторой системы аксиом существует или можно построить интерпретацию (модель), то эта система аксиом непротиворечива, т. е. не только сами аксиомы, но и любые теоремы, на них логически основывающиеся, никогда не могут противоречить одна другой.

Итак, доказательство логической непротиворечивости той или иной геометрии можно свести к доказательству существования модели соответствующей системы аксиом.

Первой моделью планиметрии Лобачевского была интерпретация Бельтрами в 1868 г., к которой позже, но из других соображений и в ином виде пришел в 1870 г. немецкий математик Феликс Клейн. Идею этой интерпретации относительно планиметрии можно усмотреть в приведенном выше рисунке 64. В качестве *плоскости Лобачевского*, коротко «плоскость *Л*», принимается внутренность некоторого круга (исключается таким образом его контур) на обычной евклидовой плоскости. *Прямыми Л* служат хорды круга, исключая, конечно, их концы. *Принадлежность* и *между* понимаются в обычном евклидовом смысле. Наконец, *конгруэнтность* определяется с помощью некоторого преобразования[2]. Ока-

[1] Это была частичная, локальная интерпретация, так как на псевдосфере реализуется геометрия не всей плоскости Лобачевского, а лишь ее куска, части.

[2] См.: Каган В. Ф. Лобачевский. М.; Л., 1948, с. 421

зывается, что в этой модели имеют место все аксиомы абсолютной геометрии, т. е. аксиомы принадлежности, порядка, конгруэнтности, непрерывности. Что же касается аксиомы параллельности, то в этой модели имеет место не постулат Евклида, а именно аксиома Лобачевского: через точку C, не лежащую на данной прямой (хорде) AB, можно провести по крайней мере две прямые (хорды), не пересекающие данную. Выполняются, конечно, также все следствия аксиомы. Так, например, среди проходящих через данную точку расходящихся прямых $Л$ имеются две предельные: CL и CM, параллельные к AB в смысле Лобачевского, так как разделяют класс расходящихся с AB прямых от класса сходящихся. Сами параллельные не имеют с AB общих точек, поскольку точки A и B, лежащие на окружности, исключены.

Аналогично строится модель Клейна геометрии Лобачевского в пространстве, принимая внутренность какого-либо шара за *пространство Л*.

Таким образом, была показана непротиворечивость геометрии Лобачевского. Ее аксиомы и теоремы не могут быть противоречивыми, так как каждой из них соответствует факт евклидовой геометрии внутри круга (или внутри шара). Если в геометрии Лобачевского встретились бы две противоречащие друг другу теоремы, то, переводя эти теоремы на язык обычной геометрии посредством модели Клейна, мы получили бы противоречие между соответствующими теоремами в геометрии Евклида, т. е. построением модели Клейн показал, что геометрия Лобачевского непротиворечива в такой же мере, в какой непротиворечива геометрия Евклида[1].

Другую модель геометрии Лобачевского построил в 1882 г. французский математик Анри Пуанкаре (1854—1912), применивший ее к решению некоторых важных задач теории функций комплексного переменного[2].

Одним из важнейших результатов открытия геометрии Лобачевского (называемой также гиперболической геометрией) было развитие новых, неевклидовых геометрий, в первую очередь геометрии Римана (в узком смысле), называемой также *эллиптической геометрией*. В качестве модели планиметрии Римана может служить сфера, если считать каждую пару диаметрально противоположных ее точек за одну «точку». Итак, *плоскость Римана* представлена евклидовой сферой. На сфере нет прямых линий, но имеются так называемые большие окружности (рис. 70), т. е. окружности с центром в центре сферы, которые в качестве геодезических ее линий выполняют на сфере ту же роль, что и прямые на плоскости. Дуги больших окружностей дают кратчайшее расстояние между двумя точками сферы, через которые они проходят, подобно

---

[1] Непротиворечивость геометрии Евклида в свою очередь сводится к непротиворечивости арифметики построением соответствующей арифметической модели.

[2] Еще об одной модели Пуанкаре плоскости Лобачевского см.: МШ, 1965, № 1—2.

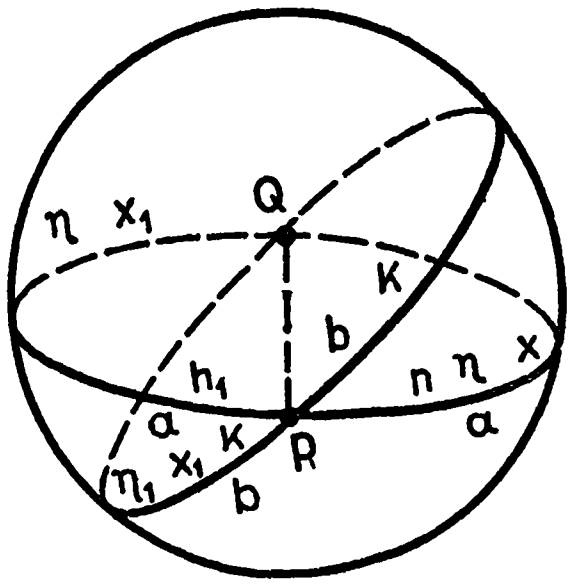


Рис. 70.

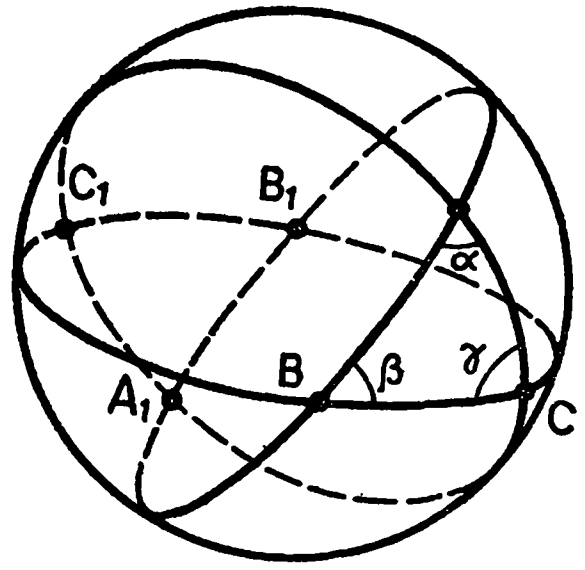


Рис. 71.

тому как отрезок прямой на плоскости представляет кратчайшее расстояние между двумя точками сферы, через которые они проходят, подобно тому как отрезок прямой на плоскости представляет кратчайшее расстояние между его концами; через две точки сферы проходит одна и только одна большая окружность, подобно тому как две точки плоскости определяют одну и только одну прямую; из дуг больших окружностей на сфере, как из отрезков прямых на плоскости, можно образовать сферические треугольники, четырехугольники, многоугольники. Одним словом, большие окружности сферы — это ее «прямые» (рис. 71). Однако наряду с некоторыми сходствами имеется большое различие между сферической геометрией, с одной стороны, и геометриями Евклида и Лобачевского — с другой. Аксиомы, следовательно, и теоремы и формулы сферической геометрии во многом отличаются от аксиом, теорем и формул плоской геометрии Евклида, а также Лобачевского. В частности, *прямые* Римана все замкнуты и конечны, имея одну и ту же длину. Сумма углов сферического треугольника, как известно, больше $2d$; каждые две *прямые* имеют одну общую *точку*, т. е. на римановой плоскости нет параллельных прямых.

В разработку эллиптической геометрии значительный вклад внес Гаусс своими исследованиями о поверхностях.

Сравнивая три в известном отношении дополняющие друг друга геометрии: гиперболическую, евклидову (называемую также параболической геометрией) и эллиптическую, следует отметить, что в первой из них через точку вне данной прямой можно провести к этой прямой *две* параллельные, во второй — *одну*, а в третьей — *ни одной*; в первой сумма внутренних углов треугольника меньше $2d$, во второй равна $2d$, а в третьей — больше $2d$.

* *
*

Возникшие из попыток доказательства V постулата, неевклидовы геометрии, открытые Лобачевским, Бояй, Гауссом и Риманом и развитые в трудах Бельтрами, Кэли, Клейна, Пуанкаре и других ученых, стали в наши дни необходимым аппаратом для изучения механики, физики и астрономии. Особенно важна гео-

метрия Лобачевского для теории относительности, так как группа важных для теории относительности «преобразований Лоренца» изоморфна группе движений пространства Лобачевского[1].

С другой стороны, открытие неевклидовой геометрии привело к новым исследованиям в области *оснований геометрии*, и в частности к аксиоматике Гильберта. Отказываясь от аксиомы Архимеда или от аксиомы Кантора[2], он получает «неархимедову», соответственно «некантерову» геометрию и т. п. Как увидим далее (§ 23), математики наряду с трехмерным пространством стали изучать n-мерные, топологические и другие абстрактные пространства. Аксиоматический метод многие современные математики положили в основу при разработке формализованных математических дисциплин[3].

Открытие неевклидовой геометрии, начало которому положил Лобачевский, не только сыграло огромную роль в развитии новых идей и методов в математике и естествознании, но имеет и большое философское значение. Господствовавшее до Лобачевского мнение о незыблемости геометрии Евклида в значительной мере основывалось на учении известного немецкого философа Иммануила Канта (1724—1804), родоначальника немецкого классического идеализма. Кант утверждал, что человек упорядочивает явления реального мира согласно априорным представлениям, а геометрические представления и идеи якобы априорны[4], т. е. не отражают явлений действительного мира, не зависят от практики, от опыта, а являются врожденными человеческому уму, раз навсегда зафиксированными, свойственными человеческому разуму, его духу. Поэтому Кант считал, что евклидова геометрия непоколебима, неизменна и является вечной истиной.

Еще до Канта геометрия Евклида считалась незыблемой, как единственно возможное учение о реальном пространстве.

Открытие неевклидовой геометрии доказало, что нельзя абсолютизировать представления о пространстве, что «употребительная» (как называл Лобачевский геометрию Евклида) геометрия не является единственно возможной, однако это не подорвало незыблемость геометрии Евклида. Итак, в основе геометрии лежат не априорные, врожденные уму понятия и аксиомы, а такие понятия, которые связаны с деятельностью человека, с человеческой практикой. Только практика может решить вопрос о том, какая геометрия вернее излагает свойства физического пространства. Открытие неевклидовой геометрии дало решающий толчок грандиозному развитию науки, способствовало и поныне способствует более глубокому пониманию окружающего нас материального мира.

---

[1] О связи неевклидовой геометрии с реальным пространством см.: Каган В. Ф. Лобачевский. М.; Л., 1948, с. 455.

[2] У Гильберта вместо аксиомы Кантора фигурирует эквивалентная аксиома полноты.

[3] Существуют и другие направления в обосновании математики. Так, математики, придерживающиеся интуиционистского направления обоснования математики, предлагают строить всю математику генетически.

[4] Латинское слово *apriori* означает *изначально, заранее*.

§ 21. КАК ВОЗНИКЛА И РАЗВИВАЛАСЬ ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

... Было легче остановить Солнце, легче было сдвинуть Землю, чем уменьшить сумму углов в треугольнике, свести параллели к схождению и раздвинуть перпендикуляры к прямой на расхождение.

В. Ф. Каган

История проективной геометрии тесно связана с возникновением и развитием *перспективы*. Учение о перспективе, которой пользовались еще ученые и художники древности[1], первоначально составляло часть оптики. Трактаты по оптике писали древнегреческие ученые Евклид и Птолемей, каирский физик и астроном Ибн ал-Хайсам и др. Обработкой «Оптики» Евклида (рис. 72) явилась «Перспектива» польского архитектора Вителo (XIII в.).

Латинский термин *perspectiva* (от perspicere — смотреть насквозь) в средние века обозначал оптику в широком смысле (геометрическую, физическую и физиологическую). Лишь около середины XV в. этот термин приобретает смысл, близкий к современному. Своего расцвета перспектива достигает в эпоху Возрождения в связи с блестящим развитием живописи, скульптуры и архитектуры. «Трактат о живописи» Леонардо да Винчи содержит систематическое изложение законов перспективы. Правила перспективы применяли Рафаэль, Микеланджело и другие великие живописцы XV—XVII вв.

Перспектива представляет собой пример геометрического преобразования: между элементами (точками, прямыми) одной плоской или пространственной фигуры F и элементами другой, обычно плоской, фигуры F' устанавливается взаимно-однозначное соответствие по некоторому определенному правилу. В данном случае правило состоит в том, что точки фигуры F' получаются как точки пересечения с заранее заданной плоскостью (плоскостью проекций) лучей, соединяющих некоторую фиксированную точку пространства S (центр проекции или перспективы) с точками данной фигуры F (рис. 73). Последняя называется *оригиналом* или *прообразом* фигуры F'; в свою очередь F' называют *перспективой*, *проекцией* или *образом* фигуры F.

Интересен экспериментальный способ построения центральной перспективы, изобретенный художником Альбрехтом Дюрером (1471—1528). Чтобы изобразить какой-либо сложный по конфигурации предмет в перспективе, он закреплял неподвижно на столе этот предмет (на рисунке, изображенном на форзаце, взята лютня) и на некотором расстоянии от него рамку с дверцей, на которой прикреплял листок бумаги. Дверца открывалась. Через рамку пропускали шнур, один конец которого укрепляли на стене. Ху-

[1] См. гл. II, § 4; 33.

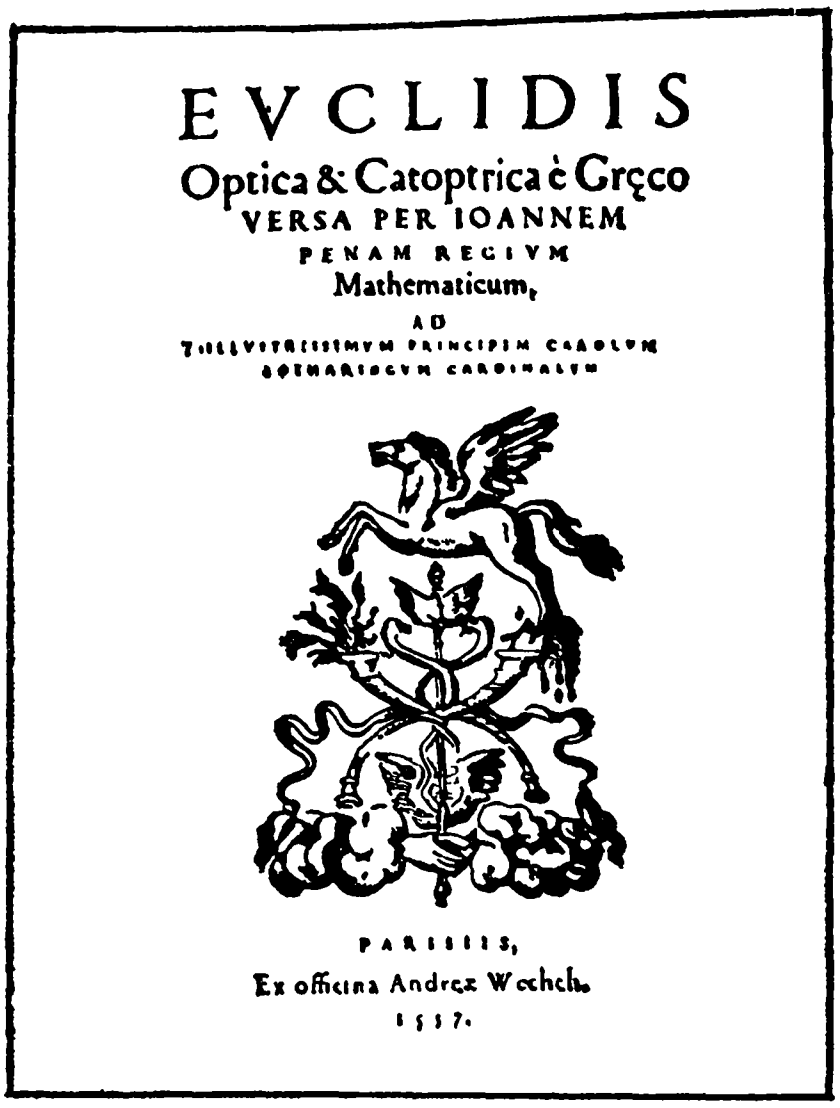


Рис. 72. Титульный лист «Оптики» Евклида на латинском языке. Париж, 1557.

дожник натягивал шнур и прикасался к одной из точек поверхности проектируемого предмета, а его помощник посредством двух нитей, прикрепленных к двум смежным сторонам рамки, отмечал эту точку в плоскости рамки — натягивал и закреплял воском нити так, чтобы точка их пересечения совпадала с натянутым шнуром. После этого шнур ослабляли, закрывали дверцу рамки и карандашом отмечали на листке бумаги «пойманную» точку — пересечение нитей. Затем последовательно точку за точкой с поверхности проектируемого предмета переносили на листок бумаги. Соединение точек линией давало контур перспективного изображения предмета (в данном случае лютни).

Легко заметить, что во взаимно однозначном точечном соответствии, устанавливаемом с помощью центрального проектирования в обычном евклидовом пространстве, имеются дефекты. Проще всего они выявлены на рисунке 74.

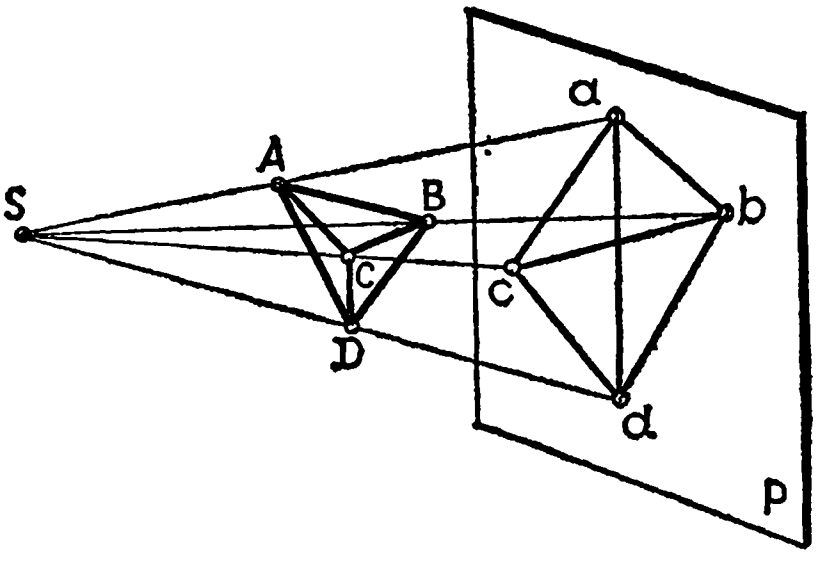


Рис. 73. Центральная проекция на плоскости.

Проектируя точки прямой p из центра S на прямую q, констатируем, что точка P_q прямой p, лежащая одновременно и на прямой SS_q, параллельной q, не имеет соответствующей себе точки (образа) на прямой q; в то же время точка Q_p прямой q, лежащая на прямой SQ_p, параллельной p, не имеет прообраза на прямой p. Этот дефект обнаруживается при центральной проекции на любой прямой: ей не хватает одной точки. Необходимость устранения этого недостатка, потребность иметь на каждой прямой как бы недостающую ей точку привели к введению понятия *бесконечно удаленной*, или *несобственной*, точки. К уже ранее известному бесконечному множеству «собственных», т. е. обычных, точек каждой прямой присоединяется еще одна несобственная точка, общая для всех прямых, параллельных данной прямой. Таким образом, общим элементом

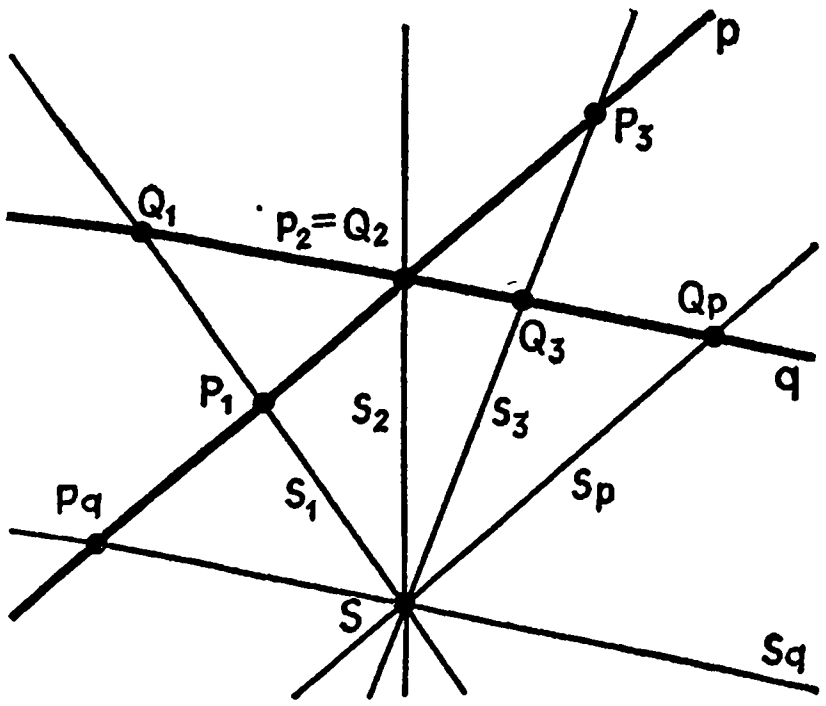


Рис. 74.

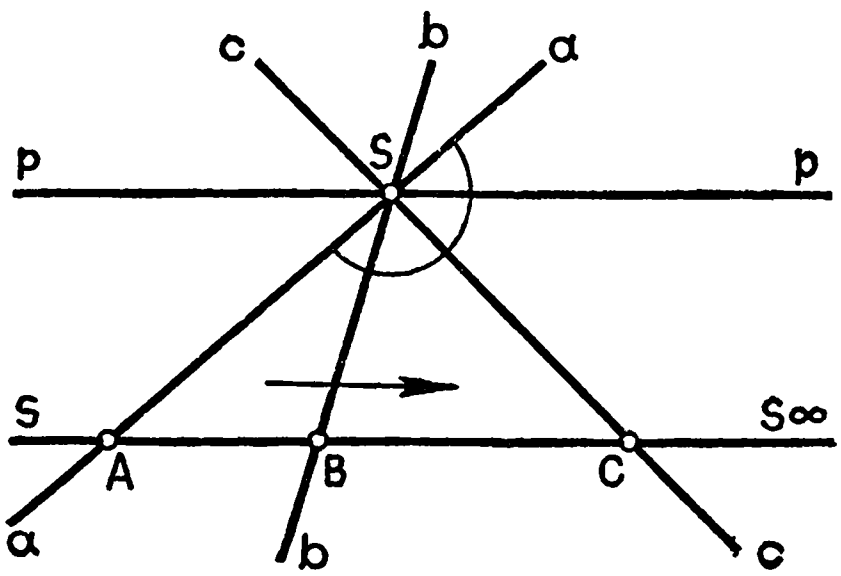


Рис. 75.

двух пересекающихся прямых является собственная точка; общий же элемент двух параллельных прямых есть (фактически их *направление*) несобственная точка. Термин «бесконечно удаленная точка» объясняется тем, что последняя как бы лежит бесконечно далеко на данной прямой, правее и одновременно левее всех ее собственных точек (рис. 75), являясь *предельным* положением точки, неограниченно удаляющейся по прямой в ту или иную ее сторону, подобно тому как прямая p, параллельная прямой s, представляет собой предельное положение прямой SA, пересекающей s при вращении SA около точки S в одном или другом направлении.

Таким образом, проективная прямая является *замкнутой* линией подобно окружности. Действительно, продвигаясь неограниченно в направлении ABC, можно, «проходя» через бесконечно удаленную точку S_∞ прямой s вернуться к исходной точке A с другой стороны прямой. Когда точка P_1 прямой оригинала P (рис. 74) стремится к предельному положению P_∞, проходя через точки P_2, P_3, ..., ее образ Q_1 на прямой q стремится к точке Q_p. Эта точка — образ бесконечно удаленной точки — называется в линейной перспективе *точкой схода*. Название это объясняется тем, что параллельные прямые оригинала в перспективе изображаются прямыми, сходящимися в одной точке (рис. 76).

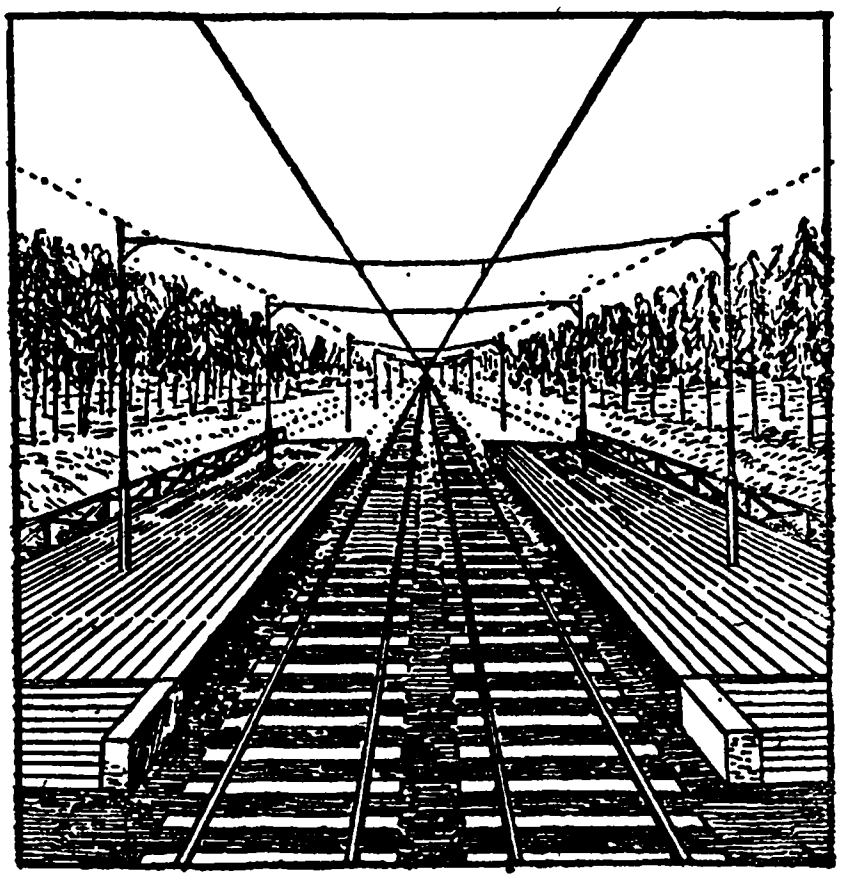


Рис. 76. Перспективы железнодорожных рельсов.

Аналогично при желании установить взаимно однозначное

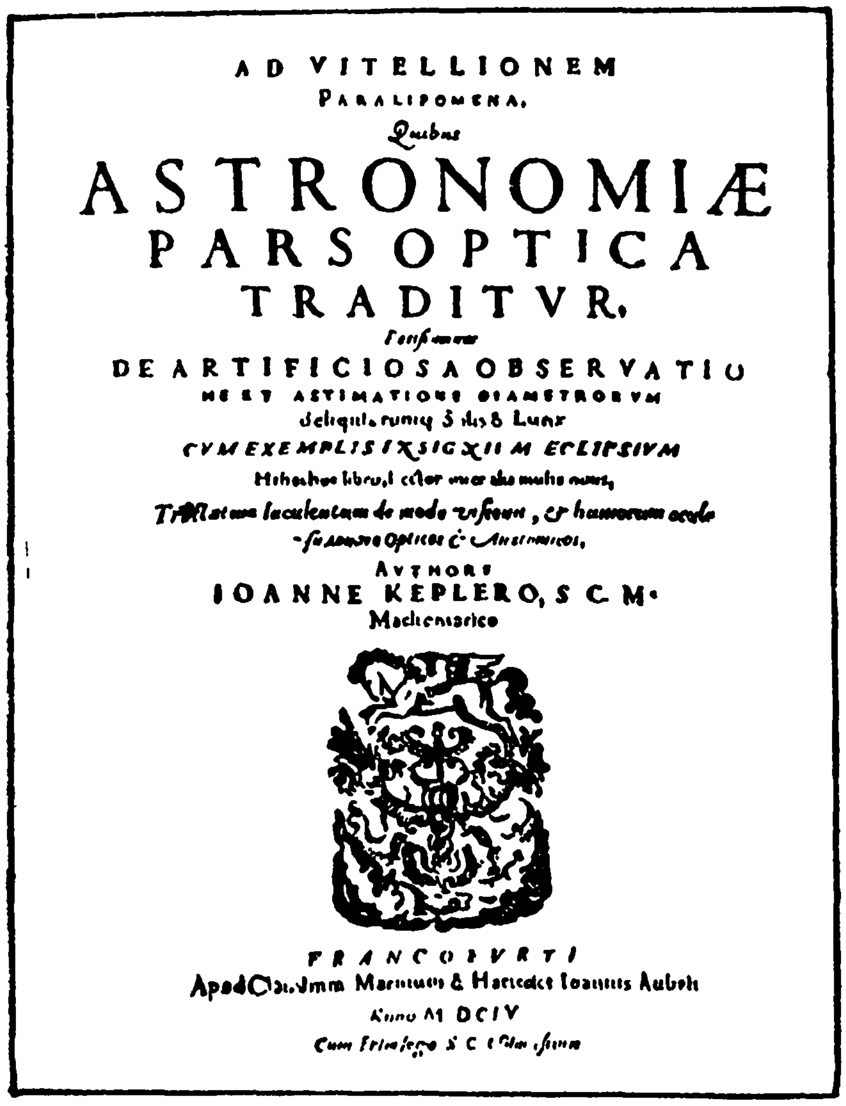

AD VITELLIONEM
PARALIPOMENA,
Quibus
ASTRONOMIÆ
PARS OPTICA
TRADITVR.
DE ARTIFICIOSA OBSERVATIONE ET ASTIMATIONE DIAMETRORVM
deliquiorumq; Solis & Lunæ
CVM EXEMPLIS INSIGNIVM ECLIPSIVM
AVTHORE
IOANNE KEPLERO, S. C. M.
Mathematico
FRANCOFVRTI
Anno M DCIV

Рис. 77. Титульный лист «Оптической части астрономии» И. Кеплера, изданной на латинском языке в 1604 г.

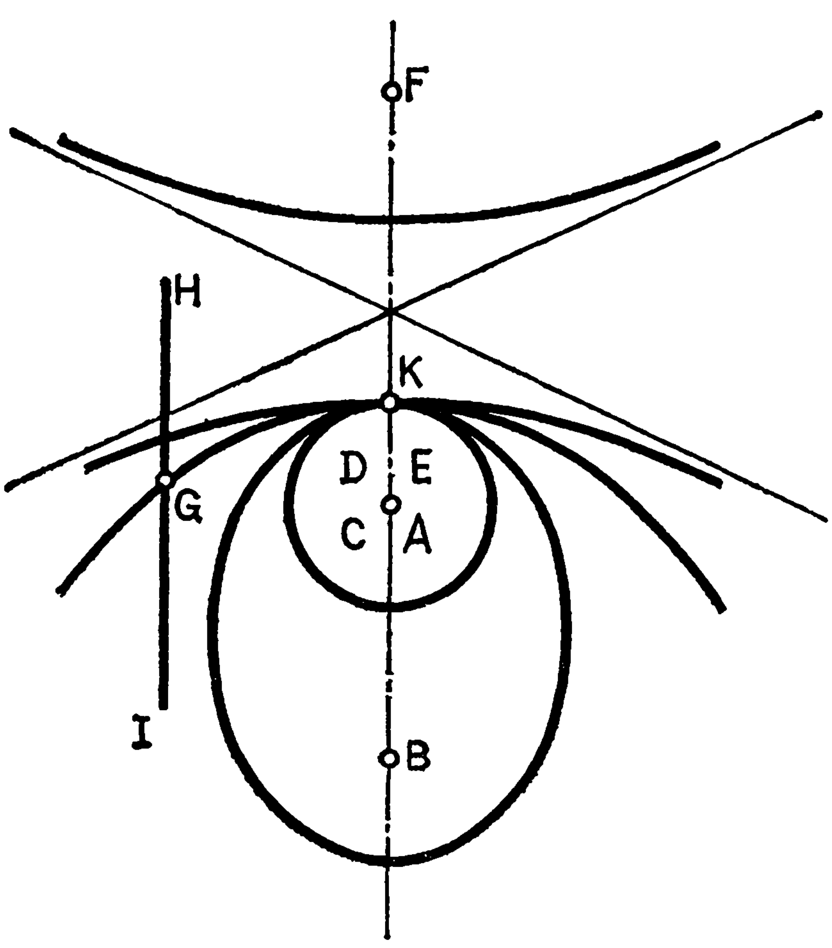


Рис 78.

соответствие применение перспективы в пространстве приводит к понятию *бесконечно удаленной* (несобственной) прямой плоскости, общей всем параллельным с ней плоскостям и рассматриваемой как множество всех несобственных точек данной плоскости. Присоединяя каждой прямой одну несобственную точку и каждой плоскости одну несобственную прямую, мы расширяем обычные, евклидовы понятия точки и прямой, при этом, однако, соблюдаем закон перманентности[1] и не нарушаем соответствующих отношений принадлежности. Так, например, через две точки всегда проходит одна и только одна прямая. Если одна из данных точек S является собственной, а другая S_∞ несобственной (изображаемой некоторой прямой s), то через эти две точки проходит одна и только одна прямая p (рис. 75) и т. п.

С этой точки зрения оказалось целесообразным ввести понятие и бесконечно удаленной (несобственной) плоскости пространства как множества всех несобственных элементов пространства. Эта плоскость пересекается с каждой прямой в одной (ее несобственной) точке и с каждой плоскостью по одной (ее несобственной) прямой.

Новое пространство, полученное путем расширения обычного евклидова пространства, точнее посредством присоединения к последнему несобственных элементов (точек, прямых, плоскости), называют *проективным пространством*.

---

[1] См. гл. I, § 1; 2.

Одним из преимуществ введения несобственных элементов является общий характер геометрических предложений, общность формулировок тех или иных свойств геометрических образов. Например, в проективном пространстве существуют следующие общие свойства: 1) две различные прямые плоскости всегда определяют одну-единственную точку (в случае параллельных прямых точка несобственная); 2) две плоскости всегда определяют одну-единственную прямую. В евклидовом пространстве эти предложения не всегда верны.

Термин «точка схода» (по-латыни *punctum concursus*) был впервые введен в 1600 г. итальянским ученым Гуидо Убальдо дель Монте (1545—1607), который в сочинении о перспективе изложил учение о точках схода.

Понятие точки схода, возникшее из практических нужд живописи и архитектуры, явилось предвосхищением понятия «бесконечно удаленные элементы», которое впоследствии послужило краеугольным камнем для построения научной проективной геометрии. Спустя четыре года после появления труда Убальдо, немецкий математик и астроном И. Кеплер опубликовал сочинение (рис. 77) «Оптическая часть астрономии»[1], в котором впервые явно вводит понятие и термин *бесконечно удаленная точка*. К этому понятию Кеплер приходит, рассматривая конические сечения как линии, непрерывно переходящие друг в друга. Он пишет: «... прямая линия переходит в параболу через бесконечные гиперболы, а далее через бесконечные эллипсы — в круг» (рис. 78); «самая тупая из гипербол — прямая линия, а самая острая — парабола; самый острый из эллипсов — парабола, а самый тупой — круг»; «у круга имеется один фокус A, он же и его центр. У эллипса имеются два фокуса B, C, равноудаленные от центра фигуры, и, чем острее эллипс, тем более удаленные. У параболы имеется только один фокус D внутри фигуры, а другой следует представлять себе на оси сечения вне или внутри его *удаленным от первого на бесконечное расстояние*, так что линии HG и IG, проведенные из этого слепого фокуса в произвольную точку G сечения, параллельны оси DK». Последнее предложение означает, что все параллельные между собой прямые встречаются в одной и той же бесконечно удаленной точке; утверждение же Кеплера о том, что «слепой»[2] фокус находится на оси параболы по любую сторону от ее фокуса D, означает, что прямая DK замыкается ее бесконечно удаленной точкой. Это рассуждение представляет собой первое применение общего принципа непрерывности.

«Отцом проективной геометрии» принято считать французского математика Жирара Дезарга (1593—1662), сочинение которого,

---

[1] Это сочинение имеет подзаголовок «Дополнение к Вителлию», так как здесь развивается учение о перспективе Вителло.

[2] Этот термин образован, вероятно, по аналогии с терминами «немой», «глухой», применявшимися в то время для иррациональных чисел.

посвященное учению о конических сечениях и скромно озаглавленное «Первоначальный набросок попытки разобраться в том, что происходит при встрече конуса с плоскостью» (1639), фактически содержит первое систематическое изложение идей проективной геометрии. Будучи инженером и архитектором, Дезарг пришел к этим идеям благодаря занятиям по перспективе.

Исследуя конические сечения как перспективные образы окружности, Дезарг последовательно разрабатывает учение о бесконечно удаленных точках и прямых. Он, в частности, рассматривает гиперболу как единую линию, состоящую из двух ветвей и имеющую две бесконечно удаленные точки (определенные ее асимптотами, касающимися гиперболы в этих точках), и констатирует, что парабола имеет одну бесконечно удаленную точку, принадлежащую также ее оси, а точки эллипса — все конечные, собственные. В своих исследованиях над коническими сечениями Дезарг фактически впервые применял понятие *проективного преобразования*, под которым впоследствии стали понимать всякое отображение одной фигуры на другую, получающееся посредством центрального (а в широком смысле и параллельного) проектирования или же посредством некоторого числа последовательных таких проектирований. Те свойства фигур, которые остаются *инвариантными*, т. е. неизменными при проективных преобразованиях, называют *проективными свойствами*. Они связаны с понятиями *положения*, *расположения*, *пересечения*. Таковы, например: 1) *инцидентность* (принадлежность) точки и прямой или прямой и плоскости; 2) *коллинеарность* точек: всякое проективное преобразование переводит три или более точек, лежащих на одной прямой, в точки, лежащие тоже на одной прямой, 3) *конгруэнтность* трех и более прямых: прямые, проходящие через одну точку, преобразуются в прямые, тоже проходящие через одну точку, и др. Говорят также, что инцидентность, коллинеарность и т. п. являются *инвариантами* любых преобразований. Та же часть геометрии, т. е. совокупность геометрических теорем (и аксиом), изучающая проективные свойства геометрических фигур, и называется *проективной геометрией*.

Проективным свойствам (первоначально) противопоставляются *метрические* (от греческого «метрео» — измеряю) свойства фигур, связанные с *измерением величин*, с понятием *длины* отрезка, *величины* угла, *равенства* фигур, площади, объема и т. п. Проективные преобразования вообще искажают величины отрезков и углов, т. е. не сохраняют метрические свойства фигур. Последние остаются, однако, инвариантными относительно другого, более узкого класса геометрических преобразований, называемых *движениями* (осевая и центральная симметрия, поворот и т. д.). Та часть геометрии, которая изучает метрические свойства фигур, называется *метрической геометрией*; именно она изучается в средней школе и обычно называется элементарной геометрией.

В школе мы изучаем в основном теоремы метрической геометрии, например: теорему о сумме внутренних углов треугольника,

теорему о том, что в любом треугольнике одна сторона меньше суммы двух других его сторон, теорему Пифагора и др. Одна из первых теорем проективной геометрии была открыта Дезаргом и носит его имя.

Теорема Дезарга. Если два треугольника ABC и $A'B'C'$ (рис. 79) лежат в одной плоскости так, что прямые, соединяющие соответственные вершины (A и A', B и B', C и C'), проходят через одну точку S, то точки A_0, B_0, C_0 — точки пересечения соответственных сторон — лежат на одной прямой, и обратно.

Теорема Дезарга была впервые изложена в небольшом его сочинении, выпущенном в Париже в 1636 г. Любопытно отметить, что доказательство этой теоремы основывается на сравнительно простом доказательстве[1] соответствующей «пространственной» теоремы, в которой предполагается, что треугольник ABC и треугольник $A'B'C'$ лежат в двух различных пересекающихся плоскостях.

Конфигурация (т. е. фигура, состоящая из m точек n прямых, в которой каждой прямой принадлежит p точек и каждой точке d прямых), изображенная на рисунке 79 и названная *конфигурацией Дезарга*, содержит одинаковое число (10) точек и прямых, причем каждой точке инцидентны три прямые и каждой прямой — три точки. Такого рода конфигурацию называют правильной и в данном случае обозначают $\binom{10}{3}$.

В «Первоначальном наброске» Дезарга содержится и важнейшее понятие проективной геометрии — сложное (или двойное, или ангармоническое[2]) отношение четырех точек прямой. Рассмотрим сперва три точки A, B, C на прямой a (рис. 80). Назовем простым отношением трех точек A, B, C отношение $\frac{AC}{BC}$ и обозначим $(ABC) = \frac{AC}{BC}$.

Аналогично $(ABD) = \frac{AD}{BD}$.

Точки A и B называются *базисными*, C или D — *делящими*. Оказывается, что не только длины отрезков AB, BC и т. д. не

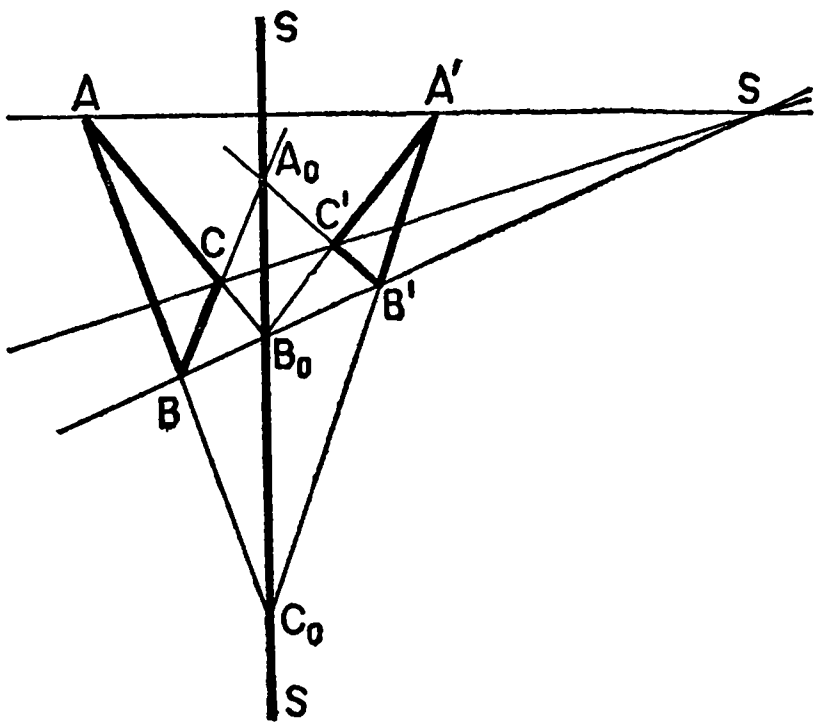


Рис. 79.

[1] См, например: Четверухин Н Ф. Проективная геометрия М, 1953, с. 91—95.

[2] Термин «двойное отношение» был введен А. Мёбиусом в его «Барицентрическом исчислении» (1827), «ангармоническое отношение» — М. Шалем в его «Историческом обзоре происхождения и развития методов геометрии» (1837).

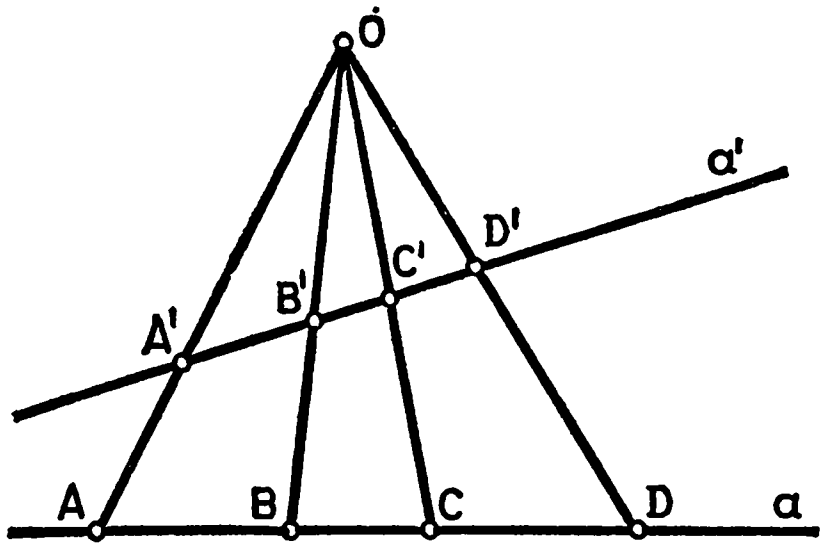


Рис. 80.

сохраняются при проектировании, но изменяются также отношения двух каких-либо отрезков, т. е. простые отношения трех точек прямой. Если же внести в рассмотрение четвертую точку D прямой a и определить сложное отношение четырех точек A, B, C, D, обозначаемое $(ABCD)$ как отношение двух простых отношений трех точек т. е.

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD},$$

то это двойное отношение инвариантно относительно любого проективного преобразования. Пара точек A, B называется *базисной*, другая пара C, D — *делящей*. При определении сложного отношения существенную роль играет *порядок*, в котором записываются точки A, B, C, D. Легко проверить, что если $(ABCD) = k$, то при всевозможных перестановках будут существовать равенства, указанные в следующей таблице:

1) $(ABCD) = (CDBA) = (DCBA) = (BADC) = k,$

2) $(ABDC) = (DCAB) = (CDBA) = (BACD) = \frac{1}{k},$

3) $(ACBD) = (BDAC) = (DBCA) = (CADB) = 1 - k,$

4) $(ACDB) = (DBAC) = (BDCA) = (CABD) = \frac{1}{1-k},$

5) $(ADBC) = (BCAD) = (CBDA) = (DACB) = \frac{k-1}{k},$

6) $(ADCB) = (CBAD) = (BCDA) = (DABC) = \frac{k}{k-1}.$

Итак, получаем шесть различных значений сложного отношения четырех данных точек прямой. Из таблицы видно также, что сложное отношение не изменяется от перестановки пар точек или от одновременной перестановки букв внутри каждой пары.

В перспективной плоскости основными геометрическими формами являются *прямолинейный ряд точек*, т. е. совокупность точек A, B, C, D, ..., принадлежащих данной прямой s, называемой носителем ряда, и *пучок прямых*, т. е. совокупность прямых a, b, c, d, ... на плоскости, инцидентных одной точеке S (центр или носитель пучка). Если прямолинейный ряд s (A, B, C, D, ...) образован посредством сечения пучка S (a, b, c, d, ...), или, что то же, пучок S образован путем проектирования из центра S точек ряда s,

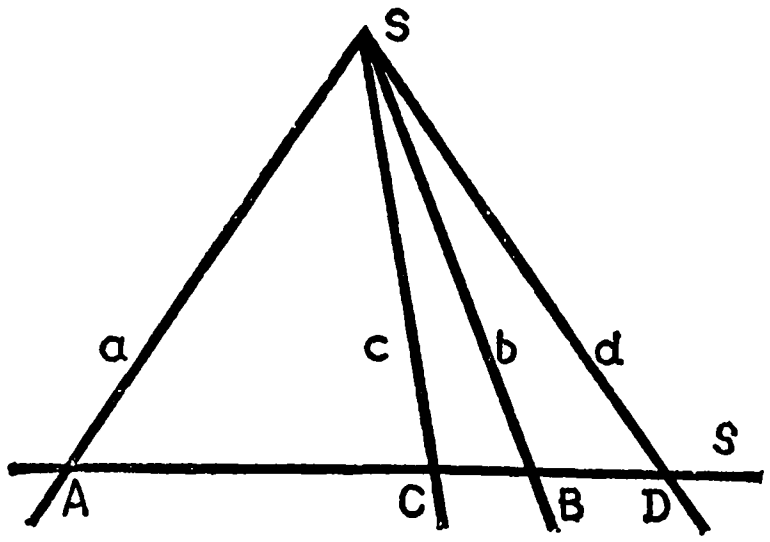


Рис 81

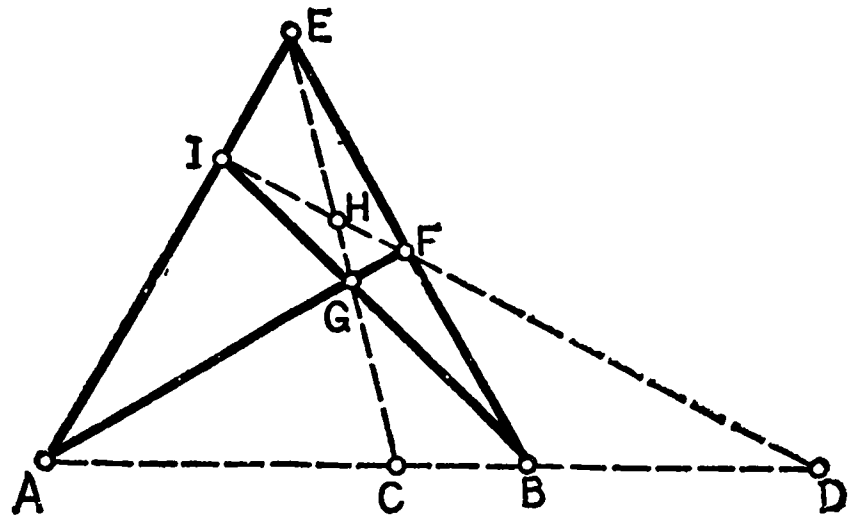


Рис. 82

то пучок и ряд называются *перспективными*. Сложное отношение четырех прямых пучка, обозначаемое $(abcd)$, определяется так:

$$(abcd) = \frac{(abc)}{(abd)} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

Можно доказать, что $(ABCD) = (abcd)$. Если

$$(ABCD) = -1, \qquad (1)$$

то сложное отношение (рис. 81) называется *гармоническим*. Гармонической называется в этом случае и сама четверка точек.

Из (1) следует, что $\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$, т. е. точки C и D делят отрезок AB в одинаковом отношении: первая — внутренним образом, вторая — внешним. Говорят также, что точки C и D делят отрезок AB гармонически, или что C и D гармонически сопряжены относительно пары точек A и B. Также гармонической называется и четверка прямых a, b, c, d пучка S, перспективного ряду s:

$$(abcd) = (ABCD) = -1.$$

В проективной геометрии важную роль играет одна плоская фигура, которую называют *полным четырехугольником* (рис. 82). Она образована четырьмя точками (вершинами) E, F, G, I, из которых никакие три не коллинеарны, и шестью прямыми или тремя парами противоположных сторон (EI и FG, EF и IG, EG и IF), определяемыми тремя соответствующими парами вершин. Точки A, B и H пересечения противоположных сторон названы *диагональными*, прямые же, их попарно соединяющие (AB, BH и AH), — диагоналями. Оказывается, что *на каждой диагонали* (*допустим*, AB) *полного четырехугольника имеется гармоническая четверка точек, состоящая из пары диагональных точек* (A, B) *и двух точек* (C, D) *пересечения рассматриваемой диагонали* (AB) *с парой сторон* (EG, IF), *проходящих через третью диагональную точку* (H).

Чтобы доказать эту теорему, т. е. что $(ABCD) = -1$, воспользуемся инвариантностью сложного отношения при проектированиях и спроектируем последовательно четверку точек A, B, C, D

из центра E на прямую ID, полученные образы I, F, H, D — из G вновь спроектируем на прямую AB. Получим:

$$(ABCD) = (IFHD) = (BACD). \qquad (2)$$

Но согласно вышеприведенной таблице имеем:

$$(BACD) = \frac{1}{(ABCD)}.$$

Из (2) вытекает, что

$$(ABCD) = \frac{1}{(ABCD)},$$

или

$$(ABCD)^2 = 1, \quad (ABCD) = \pm 1.$$

Но если $(ABCD)$ равнялось бы единице, то по определению было бы $(ABC) = (ABD)$, т. е. точки C и D должны совпадать, а это в данном случае исключается. Значит,

$$(ABCD) = -1.$$

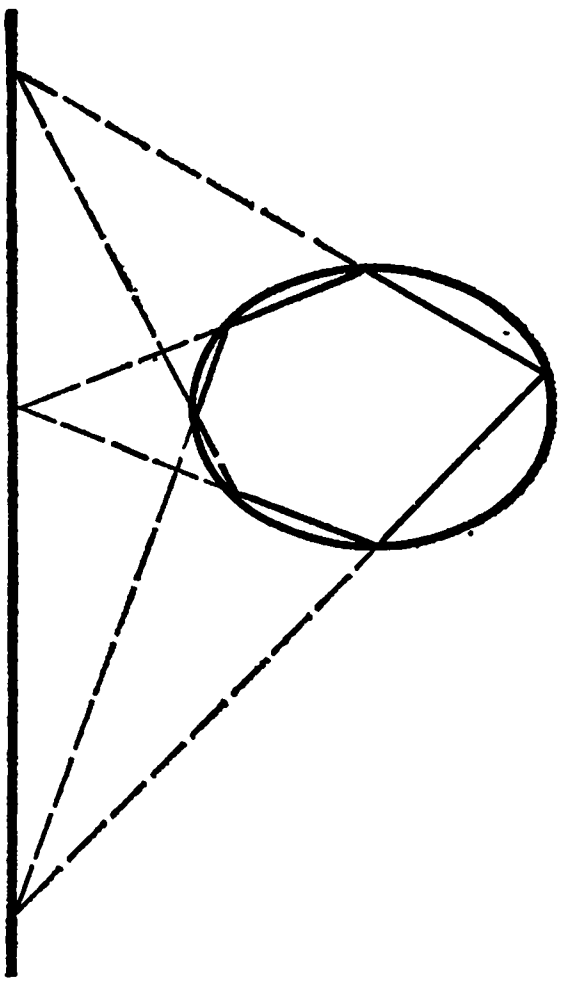


Рис. 83.

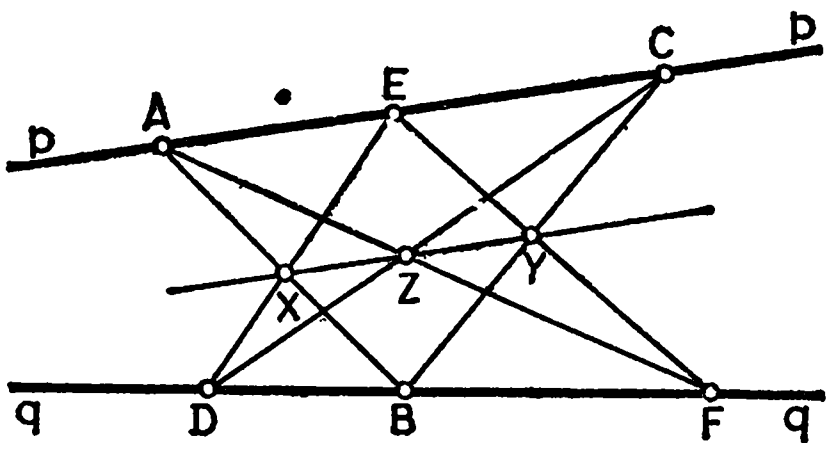


Рис. 84.

Доказанная теорема дает нам возможность с помощью одной лишь линейки построить точку, четвертую гармоническую к трем данным. (Как?)

Следует отметить, что некоторые понятия проективной геометрии возникли уже в древности. В частности, Папп Александрийский (III в.) писал в своих «Поризмах» об ангармоническом и гармоническом отношении четырех прямых пучка и четырех точек прямой, а также о гармонических свойствах полного четырехугольника. Отдельные предложения, относящиеся к *теории поляр*, систематически изложенной и обоснованной Дезаргом, были доказаны еще Аполлонием Пергским (III—II вв. до н. э.) в его «Конических сечениях».

Учение Дезарга о конических сечениях было продолжено юным французским математиком Блезом Паскалем. В 16-летнем возрасте он опубликовал в Па-

риже в виде афиши свой «Опыт о конических сечениях», в котором содержится одно из важнейших предложений проективной теории конических сечений, носящее его имя.

Теорема Паскаля. Точки пересечения противоположных сторон шестивершинника, вписанного в коническое сечение, лежат на одной прямой (рис. 83). Эта прямая была названа впоследствии «прямой Паскаля». Следуя методу Дезарга, Паскаль вначале доказал эту теорему для окружности, а затем, пользуясь центральной проекцией, распространил ее на всякое коническое сечение. Из своей теоремы Паскаль вывел около 400 следствий. Одно из них гласит, что коническое сечение (кривая 2-го порядка) определяется вообще пятью своими точками. (Докажите!)

В частном случае, если коническое сечение распадается на две прямые, то теорема Паскаля ведет к конфигурации, изображенной на рисунке 84. Здесь имеем 9 прямых (2 из которых представляют распавшееся коническое сечение, 6 — стороны шестиугольника, 1 — прямая Паскаля) и 9 точек (6 вершин шестиугольника и 3 точки пересечения противоположных сторон), причем на каждой прямой лежат 3 точки, а через каждую точку проходят 3 прямых. Это правильная конфигурация, обозначаемая $(\frac{9}{3})$. Частный случай теоремы Паскаля, о котором идет речь, был уже известен Паппу Александрийскому. Вот почему конфигурация $(\frac{9}{3})$ носит название *конфигурации Паппа — Паскаля.*

Развитию проективной геометрии в XVII в. содействовал в известной мере еще один французский геометр — Филипп де Лагир (1640—1718), который был и художником. Он установил ряд новых теорем в опубликованном им в 1685 г. сочинении «Конические сечения».

Развитие проективной геометрии как науки не случайно началось в XVII в., первом веке математики переменных величин, когда, по выражению Энгельса, «в математику вошли движение и диалектика».

В противоположность геометрии, изложенной в «Началах» Евклида и изучающей в основном лишь неподвижные фигуры, Убальдо, Кеплер, Дезарг и Паскаль приводят в движение геометрические образы, вводя в геометрию идеи изменения, преобразования, бесконечности и предела: пробегая прямую линию и уходя по ней в бесконечность, стремящаяся к предельному положению точка становится «точкой схода» или «бесконечно удаленной точкой»; вращаясь вокруг центра пучка, его прямая, образует на секущей прямой перспективный ряд точек; окружность преобразуется то в эллипс, то в параболу или гиперболу; парабола представляется как предельный переходный случай между эллипсом и гиперболой и т. д.

Проективная геометрия оперирует, как мы видели, не посредством алгебраических действий и арифметических вычислений, а чисто геометрическими, синтетическими (т. е. неаналитическими)

средствами: проектированием, пересечением и т. п. Именно этим объясняется парадоксальный на первый взгляд, но диалектически понятный факт: те самые мотивы, которые способствовали в XVII в. началу развития новой синтетической, проективной геометрии, они же и оказались тормозом в ее дальнейшем развитии. Дело в том, что общие запросы в области естествознания, практики и техники, породившие идеи переменных и бесконечных величин, движения и предельных переходов, были более обширными и важными, чем запросы перспективы, и требовали создания более сильного и всеобщего аналитического аппарата, создания и развития аналитической геометрии и математического анализа. «Немедленно необходимым, — писал Энгельс, — стало дифференциальное и интегральное исчисление». Им отдавали свое время и силы величайшие математики XVII и XVIII вв. Среди многочисленных ученых, занимавшихся развитием нового аналитического аппарата в математике, Дезарг, возродивший и развивавший синтетические приемы геометрии, казался одиноким, посторонним. Увлечение подавляющего большинства видных математиков того времени анализом и разработкой новых аналитических методов исследования геометрических проблем привело даже к тому, что понятый современниками «Первоначальный набросок» Дезарга был еще в конце XVII в. полностью забыт и пропал без вести. Копия этого классического произведения Дезарга, сделанная Лагиром, была найдена лишь в 1845 г. французским геометром и историком математики Мишелем Шалем (1793—1880)[1].

Дальнейшее существенное развитие проективной геометрии связано с именем Понселе и других ученых XIX в.

* * *

К возрождению идей Дезарга в начале XIX в. дала новые стимулы в первую очередь практика, та самая, которая привела к появлению в 1798 г. «Начертательной геометрии» Монжа[2]. Важный вклад в развитие синтетической геометрии внес Лазарь Карно[3] тремя работами: 1) «О корреляции фигур» (1801), 2) «Геометрия положения» (1803) и 3) «Опыт о трансверсалях» (1806). Во второй работе доказывается теорема о полном четырехугольнике и другие предложения.

Название «Проективная геометрия» берет начало от опубликованного в Париже в 1822 г. «Трактата о проективных свойствах фигур», который является главным произведением французского математика Жана Виктора Понселе (1788—1867). Основные результаты этого труда были получены и записаны автором в

---

[1] Второй более полный печатный экземпляр «Первоначального наброска» Дезарга был обнаружен лишь около середины XX в.

[2] См. гл. II, § 4; 33.

[3] См. гл. IV, § 10

1813—1814 гг. в Саратове, где военный инженер Понселе, участвовавший в походе Наполена в Россию в 1812 г., находился в плену до осени 1814 г.

Ж Понселе

В этом труде Понселе были впервые отмечены и выделены в особый класс проективные свойства фигур, сохраняющиеся при отображении посредством центральной проекции. Трактат Понселе означал формирование проективной геометрии как самостоятельной математической дисциплины и составил новую эпоху в развитии синтетической геометрии. Как и аналитическая геометрия, синтетическая геометрия обогащается общими методами исследования фигур и решения задач.

Одной из важнейших особенностей проективной геометрии является так называемый *принцип двойственности*, открытый французским математиком Жозефом Жергоном (1771—1859).

Мы уже видели, что в проективном пространстве формулировка свойств принадлежности геометрических образов носит более общий, чем в евклидовой геометрии, и стройный характер. Отметим теперь, что предложения проективной геометрии, в которых идет речь о взаимной принадлежности (инцидентности) точек, прямых, плоскостей, в пространстве носят также двойственный, симметричный характер; они как бы группируются попарно. Например:

Три *точки*, не инцидентные одной прямой, инцидентны одной и только одной *плоскости*.	Три *плоскости*, не инцидентные одной прямой, инцидентны одной и только одной *точке*.

Такие два предложения называются двойственными. Каждое из них можно получить из другого путем замены слова «точка» словом «плоскость» и наоборот (слово «прямая» сохраняется). Это *принцип двойственности в пространстве*. В предложениях, относящихся к плоскости, симметричность проявляется относительно понятий «точка» и «прямая». Вот пример проявления *принципа двойственности на плоскости*:

Две *точки* инцидентны одной и только одной *прямой*.	Две *прямые* инцидентны одной и только одной *точке*.

Значение принципа двойственности состоит в том, что из каждого верного (т. е. допущенного в качестве аксиомы или доказанного) предложения тут же вытекает без доказательства другое верное предложение. Так, применяя принцип двойственности к теореме Паскаля, получаем новое важное предложение, так

Я. Штейнер

называемую теорему Брианшона, открытую Ш. Ж. Брианшоном (1785—1864) в 1806 г.: *прямые, соединяющие противоположные вершины шестисторонника, описанного около конического сечения, пересекаются в одной точке* (точка Брианшона).

Эта теорема (рис. 85), как и теорема Паскаля, находит много применений в геометрических построениях; она, в частности, дает возможность по пяти данным касательным любой кривой второго порядка построить сколь угодно много других касательных и т. п.

Дальнейшее развитие проективная геометрия получила в трудах Я. Штейнера и Х. Штаудта.

Якоб Штейнер (1796—1863), сын швейцарского крестьянина, в молодости был пастухом. Грамоте он научился лишь в возрасте 19 лет в школе знаменитого своего соотечественника, педагога-демократа Иоганна Генриха Песталоцци (1746—1827).

В общей педагогической системе Песталоцци геометрия как учение о формах занимала особенно важное место; ей придавалось исключительное значение в деле общего образования и развития мыслительной деятельности учащихся. Идеи Песталоцци оказали большое влияние на Штейнера и в дальнейшем склонили его к занятиям синтетической проективной геометрией. Впоследствии, будучи уже членом Берлинской Академии наук, Штейнер в предисловии к важнейшей своей работе «Систематическое развитие зависимости геометрических образов друг от друга» (ч. I, 1896) писал: «Предлагаемое произведение пытается вскрыть тот механизм, которым связаны друг с другом разнообразнейшие явления в пространстве. Существует весьма ограниченное количество весьма простых основных соотношений, выражающих ту схему, по которой остальная масса предложений развивается последовательно и без всяких затруднений. Посредством надлежащего усвоения этих немногих основных соотношений делаешься хозяином всего предмета; порядок заступает место хаоса, и видишь, как все части, естественно опираются друг на друга, располагаются в прекрасном порядке и соединяются в удачно отграниченные группы. Таким образом, удается овладеть теми элементами, из которых исходит природа, чтобы с возможной экономией и простейшим образом *придать* фигурам несчетное множество свойств».

Основной идеей работ Штейнера является проективное образование из более простых геометрических образов более сложных. Так, исходя из двух обычных проективных пучков прямых, названных *пучками первого порядка*, он приходит к определению кривой

(ряда) второго порядка как геометрического места точек пересечения соответствующих прямых данных двух пучков. Аналогично геометрическое место прямых, соединяющих соответствующие точки двух обычных проективных рядов (первого порядка), образует так называемый *пучок второго порядка*, представляющий собой совокупность касательных к кривой второго порядка. Штейнер рассматривает проективное преобразование как цепь последовательных перспективных преобразований и определяет проективное соответствие двух форм 1-й ступени (например, прямолинейного ряда и пучка прямых, или двух рядов, или двух пучков) как преобразование, сохраняющее сложное отношение четырех элементов. Большинство идей и приемов Штейнера не были новы, однако они были им точно определены и систематически изложены.

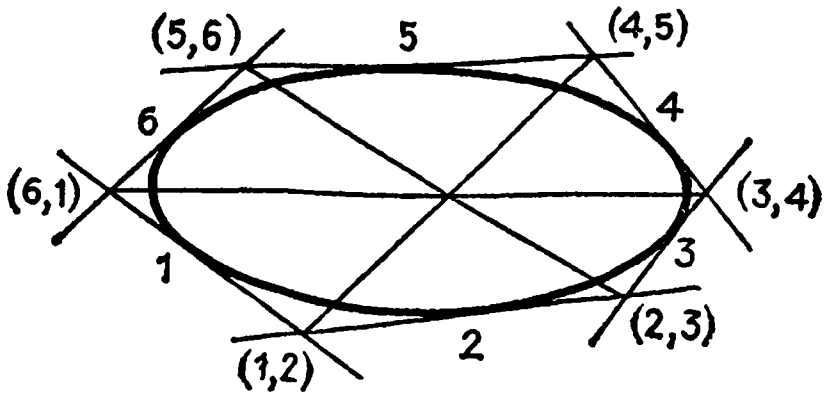


Рис. 85.

Немецкий математик Христиан фон Штаудт (1798—1867) сделал решительный шаг в отношении полного обоснования и построения проективной геометрии независимо от метрической. Сложное отношение четырех точек прямой или прямых пучка, положенное Штейнером в основу определения проективности, хотя и сохраняется при любом проективном преобразовании, само по себе является *числом*, отношением отношения длин отрезков или величин углов, т. е. *понятием метрической геометрии*.

Тот факт, что в основе геометрии, изучающей одни лишь проективные свойства фигур, лежит понятие, связанное с измерением отрезков или углов, естественно, поставил перед математиками задачу обоснования проективной геометрии посредством собственных, проективных средств. Эта задача и была решена Штаудтом в появившемся в 1847 г. труде «Геометрия положения», название которого восходит к Лейбницу и Карно. Штаудт воспользовался гармоническими свойствами полного четырехугольника для чисто геометрического определения самого понятия гармонической четверки точек; если на одной прямой даны три точки A, B, C (рис. 82) и если построить полный четырехугольник так, чтобы точки A и B были диагональными точками (т. е. через каждую из них проходила бы пара противоположных сторон), и через точку C проходила бы одна сторона, инцидентная третьей диагональной точке (H), то противоположная ей сторона (IH) пересекает данную прямую (AB) в точке D, которая называется четвертой гармонической, сопряженной с точкой C относительно пары точек A, B. После этого чисто геометрического определения понятия гармонизма Штаудт дает следующее определение проективности: *два ряда точек, или два пучка прямых, или ряд* и пучок называются проективными, если между ними установлено такое взаимно однозначное соответствие,

что каждой гармоничесской четверке элементов одной формы соответствует гармоническая четверка элементов другой. Это определение, как доказал (правда, не вполне строго) Штаудт, эквивалентно определению Штейнера. В 1857 г. появились «Очерки по геометрии положения» Штаудта, в которых автор дал чисто геометрическое, синтетическое определение и понятию мнимых точек.

Исследования Штаудта продолжили другие ученые, в том числе русские геометры Константин Алексеевич Андреев (1848—1921), Алексей Константинович Власов (1868—1922) и др.

Быстрое развитие математики в XVII—XVIII вв. повлекло за собой резкое обособление отдельных ее частей. К 1870 г. математика представляла собрание узкоспециальных и мало связанных между собой разделов, причем специализация продолжала расти. Появилась крайняя необходимость открыть принципиальные положения,

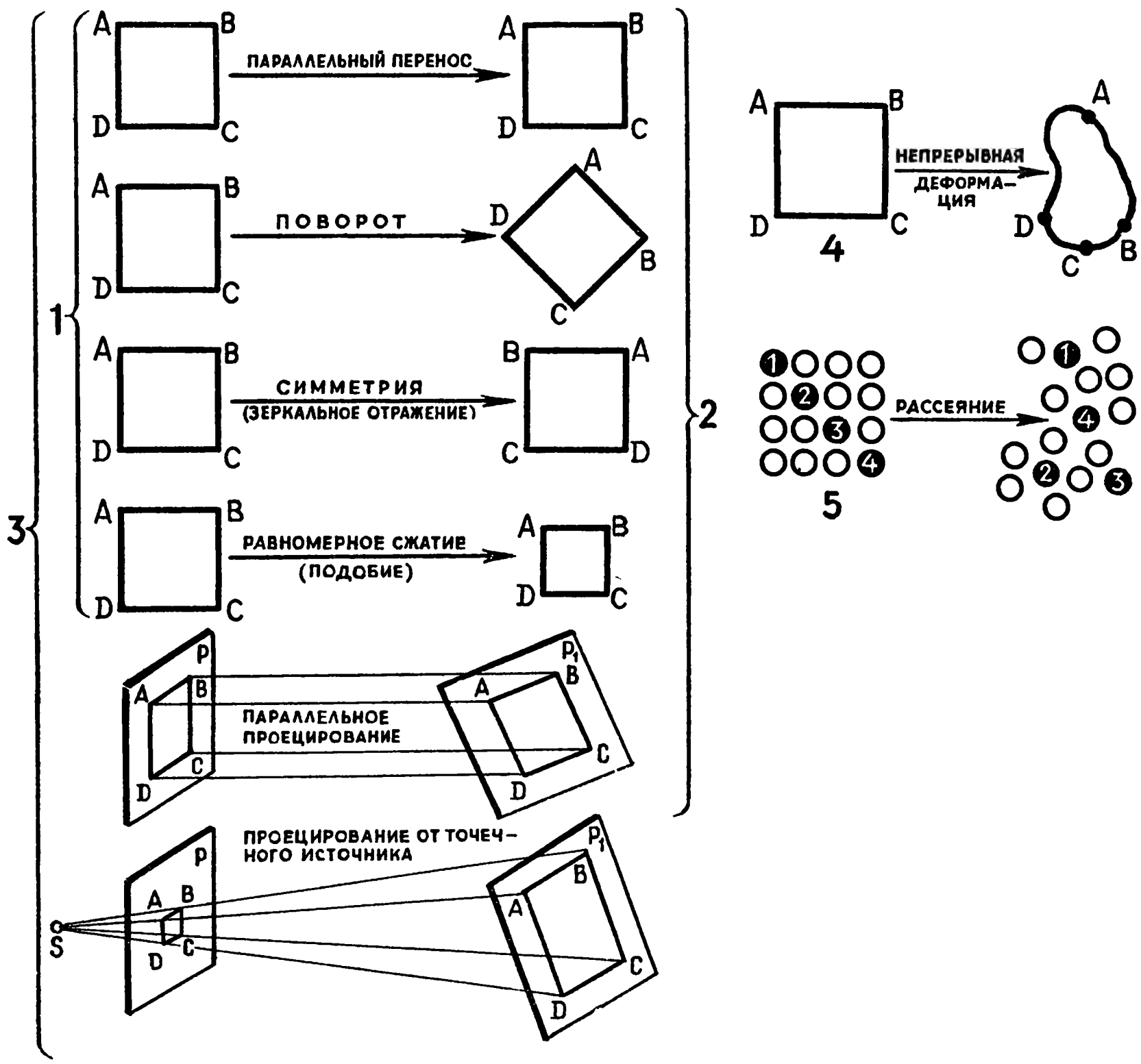


Рис. 86. Различные типы геометрий, классифицированные по группам преобразований:

1 — Евклидова геометрия; *2* — аффинная геометрия (в нее входит и евклидова); *3* — проективная геометрия (в нее включена и аффинная геометрия); *4* — топология (в нее входят 1, 2 и 3-я группы; в этой группе преобразований сохраняется порядок следования точек); *5* — теория точечных множеств; в этой группе преобразований рассеянные точки сохраняют порядковые номера, но не сохраняют порядок следования.

которые позволили бы найти общность между отдельными оторванными друг от друга разделами математики.

Одним из замечательных открытий конца XIX в. было введение понятия группы. На основе групп преобразования немецкий математик Феликс Клейн — профессор Эрлангенского университета в своей вступительной лекции в 1872 г. обстоятельно обосновал, как, опираясь на понятие группы, классифицировать различные области математики. В этой лекции, получившей название «Эрлангенская программа», различные геометрии были рассмотрены с позиций группы преобразований. На этой основе ясно обозначилось, что евклидова геометрия определяется группой движений (параллельный перенос, поворот, симметрия и подобие); аффинная геометрия характеризуется группой аффинных преобразований, которая включает все указанные выше преобразования и, кроме того, проекцию параллельными лучами на плоскость, расположенную под любым углом наклона к ним. Проективная же геометрия характеризуется группой преобразований, при которых точки, лежащие на одной прямой, переходят в точки, лежащие на другой прямой. Группа проективных преобразований включает в себя аффинную геометрию, геометрию Евклида и Лобачевского. По идее Клейна каждая группа преобразований включает в себя предшествующую группу. По предложенной классификации даже топология относится к группе непрерывных точечных преобразований (рис. 86).

Начало топологии положил в 50-х годах XIX в. Риман. Он ввел неоднородные пространства, характеристики которых меняются от точки к точке, т. е. пространства переменной кривизны. Он пришел к изучению преобразований, допускающих растяжение, сжатие, изгиб и даже скручивание. Главная задача топологии — установить, когда фигуры топологически эквивалентны.

В 1868—1884 гг. Гельмгольц занялся изучением риманова пространства независимо от идей Римана. Это привело его к исследованию природы геометрических аксиом. Вслед за ним этим же вопросом занялся Д. Гильберт. В 1899 г. в свет вышла его книга «Основания геометрии». В ней исследована и уточнена аксиоматика геометрий XIX в., что открыло новую главу в истории аксиоматического метода. Работа Гильберта стала источником ряда исследований о взаимоотношениях аксиом и о роли системы аксиом в различных разделах математики. Работы Гильберта помогли поднять аксиоматические исследования на более высокий уровень.

Теория групп и глубокие исследования аксиоматики позволили установить общность различных областей математики и выявить их единство.

Работы в области аксиоматических обоснований ряда разделов математики были продолжены в XX в. многими виднейшими математиками, в том числе и нашим академиком и крупным математиком А. Н. Колмогоровым.

§ 22. ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ. ИЗ ИСТОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Геометрия представляет возможность рассматривать модели не только физического пространства, но и любой структуры, чьи понятия и свойства подходят под геометрическую схему.
Морис Клайн

Дифференциальной геометрией называют ту ветвь геометрии, в которой плоские и пространственные кривые и поверхности изучаются с помощью дифференциального исчисления и вообще методами математического анализа. Ее развитие могло, разумеется, начаться только в XVII в.; тем не менее некоторые отдельные понятия и факты из теории плоских кривых были известны еще в древности. Таковы, например, понятия касательной к окружности у Евклида и касательной к спирали у Архимеда, в книге которого «О шаре и цилиндре» содержится также понятие выпуклости кривых и поверхностей. Понятие (и термин) «асимптоты» гиперболы, как и понятие «нормали» (перпендикуляра к касательной) в точке кривой ввел еще Аполлоний, показавший, что совокупность (семейство) всех нормалей к коническому сечению имеет огибающую, т. е. линию, касающуюся в каждой своей точке одной из прямых — нормалей семейства. Аполлоний изложил также способ построения касательных к эллипсу, параболе и гиперболе. Однако задача нахождения касательной к алгебраической плоской кривой в какой-либо ее точке была решена лишь Ферма и Декартом. Эта задача привела, как известно, Лейбница к понятию производной[1].

В отличие от аналитической геометрии, в которой изучается сравнительно небольшое число отдельных типов кривых и поверхностей (в основном 1-го и 2-го порядка), в дифференциальной геометрии исследуются любые кривые и поверхности. Важнейшая же особенность, характеризующая дифференциальную геометрию, состоит в том, что она изучает главным образом свойства геометрических образов «в малом», в данной их точке и сколь угодно малой ее окрестности. Такое изучение позволяет, например, во многих случаях заменять направление кривой в данной ее точке направлением соответствующей касательной, малые отрезки кривых — отрезками касательных и т. п.

Возникновение дифференциальной геометрии связано с решением определенных практических задач, в частности с запросами *математической картографии* — учения о свойствах разных видов картографических проекций, т. е. о способах изображения на плоскости всей или части земной поверхности, рассматриваемой как сфера или эллипсоид вращения. Необходимость в географических картах ощущалась еще в древности. *Стереографическая проекция* была применена К. Птолемеем в его «Географии». Новые методы

[1] См. гл. I, § 2.

проектирования сферы на плоскость были открыты в XVI в. в период больших географических открытий. Особенно важное значение имела «Карта мира», опубликованная в 1569 г. фламандским ученым Герхардом Кремером (1512—1594), известным в науке под латинизированным именем *Меркатора*[1]. Предложенная им математически обоснованная проекция (конформная цилиндрическая «проекция *Меркатора*», в которой меридианы и параллели сферы проектируются в прямые плоскости) поныне служит для составления морских карт. Всеобщей известностью пользовался сборник карт европейских стран Меркатора, названный им «Атласом»[2] и изданный в 1595 г. Математической картографией занимался впоследствии и Эйлер.

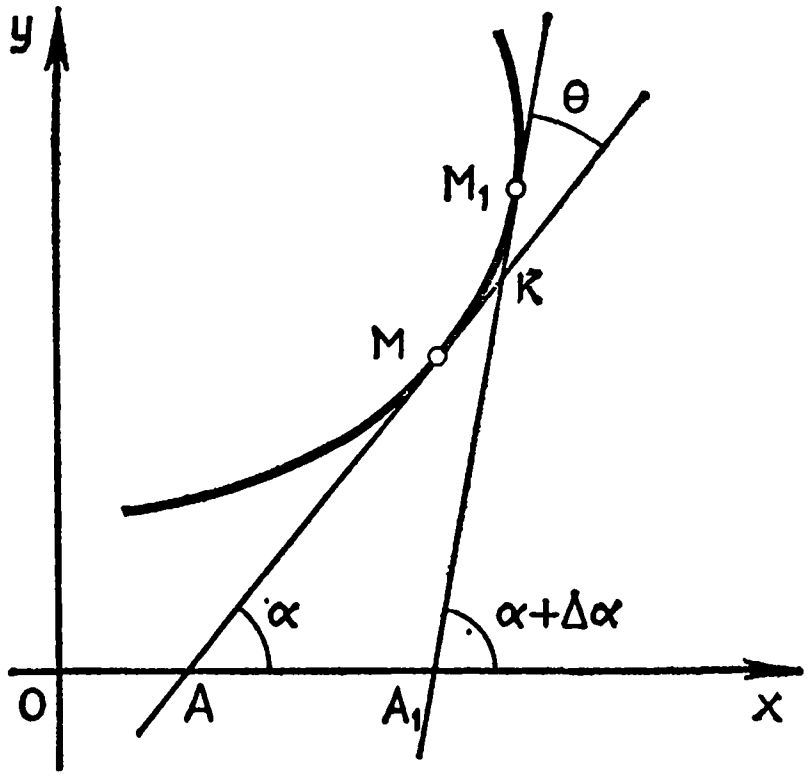


Рис. 87.

Для того чтобы понять связь теории картографических проекций с дифференциальной геометрией, следует учесть, что поверхность сферы или эллипсоида невозможно без складок и разрывов развернуть на плоскость, поэтому при их изображении допускаются известные искажения не только длин, но и площадей или углов. При этом масштаб карты (в отличие от масштаба плана), называемый «частным масштабом», неодинаков для всех точек. Этот масштаб определяется как отношение элемента (бесконечно малой) дуги на сфере или эллипсоиде к соответствующему отрезку на плоской карте. Частный масштаб, вообще говоря, различен в различных точках сферической поверхности. Таким образом, картографические проекции требуют изучения кривых и поверхностей «в малом», т. е. методов дифференциальной геометрии.

В дифференциальной геометрии плоских кривых одним из первых появилось понятие «кривизна линии», под которым понимается по существу степень искривления линии в данной точке. Это понятие было использовано Кеплером и другими математиками XVII в.

Вот математическое определение кривизны. Пусть M — точка кривой (рис. 87). M_1 — близкая к ней точка. Угол Θ между соответствующими касательными выражает поворот кривой на уча-

---

[1] Латинское слово Mercator и немецкое Кремер имеют одно и то же значение: т о р г о в е ц.

[2] В честь мифического короля Ливии — Атласа, якобы изготовившего первый небесный глобус. Согласно другому древнегреческому мифу титан Атлас (Атлант) по приказу *Зевса* держал на голове и руках небесный свод.

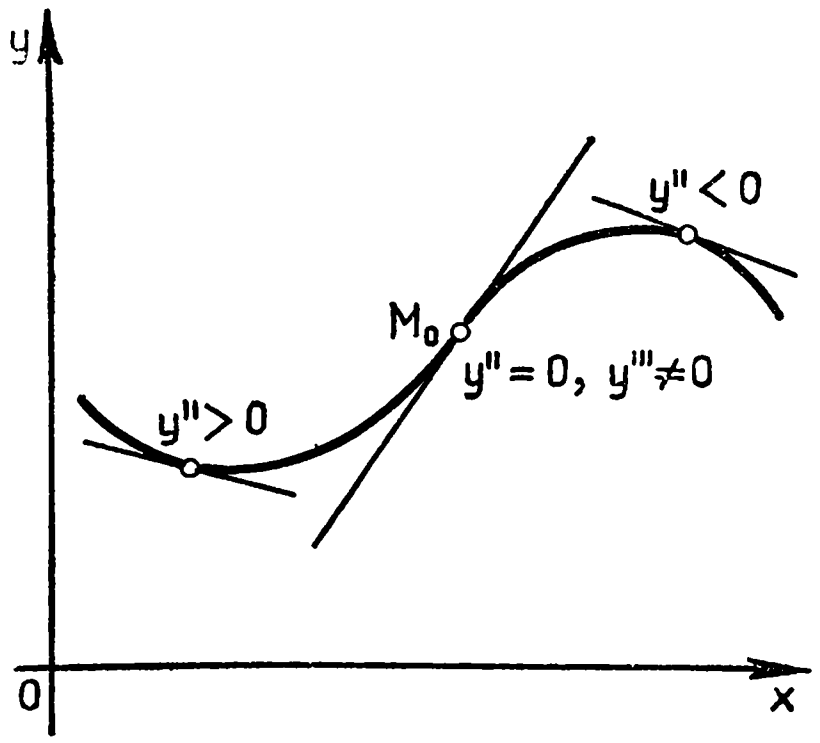


Рис. 88.

стке MM_1 и называется полной кривизной дуги $\overset{\frown}{MM_1}$, длина которой Δs. Отношение $\frac{\Theta}{\Delta s}$ представляет *среднюю* скорость поворота кривой и называется *средней кривизной* на участке $\overset{\frown}{MM_1}$. Кривизна же в точке M, обозначаемая $\frac{1}{\rho}$, как скорость поворота кривой в этой точке, определяется так:

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Theta}{\Delta s}. \qquad (1)$$

Обратная величина ρ называется радиусом кривизны. В частности, для окружности радиуса R, где $\Delta s = \Theta R$, имеем:

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Theta}{\Theta R} = \frac{1}{R}, \qquad (2)$$

т. е. кривизна окружности постоянна и равна обратной величине радиуса. По отношению к кривизне окружность играет, таким образом, такую же роль, как равномерное движение относительно скорости. Поэтому окружность берется как эталон кривизны любой кривой L, к которой она тесно прилегает, проходя через три бесконечно близкие ее точки и как бы переплетаясь с нею в окрестности данной точки. Такую *окружность* называют *соприкасающейся* с кривой L.

Для вывода формулы кривизны плоской кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, заметим, что $\angle XA_1K$ внешний по отношению к треугольнику AKA_1; поэтому имеем:

$$\Theta = \angle AKA_1 = \angle XA_1K - \angle A_1AK = \alpha + \Delta\alpha - \alpha = \Delta\alpha.$$

Итак,

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}. \qquad (3)$$

Длина дуги кривой выражается интегралом

$$s = \int_a^x \sqrt{1 + (y')^2}\, dx, \text{ откуда } s' = \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Далее, $\operatorname{tg}\alpha = y'$, значит, $\alpha = \operatorname{arctg} y'$, $\alpha' = \frac{1}{1 + (y')^2}\, y''$.

Подставляя полученные значения в (3), получим:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (4)$$

Для точки перегиба (рис. 88), вблизи которой кривая располагается по обе стороны от ее касательной, кривизна равна нулю, значит, y'' должно равняться нулю.

Из вышесказанного следует, что с каждой точкой M произвольной кривой L связана определенная соприкасающаяся окружность с центром в точке M_1 (центр кривизны). Когда точка M описывает кривую L, то центр кривизны M_1 описывает определенную линию L'. Эта линия, геометрическое место центров кривизны кривой L, называется *эволютой* По отношению к L' первоначальная кривая L называется *эвольвентой* (инволютой).

Общую теорию эволют и эвольвент развил голландский физик и математик Христиан Гюйгенс в книге «Маятниковые часы» (1679), где рассматривает точное измерение времени, что являлось одним из важнейших вопросов навигации той эпохи. Книга эта содержит

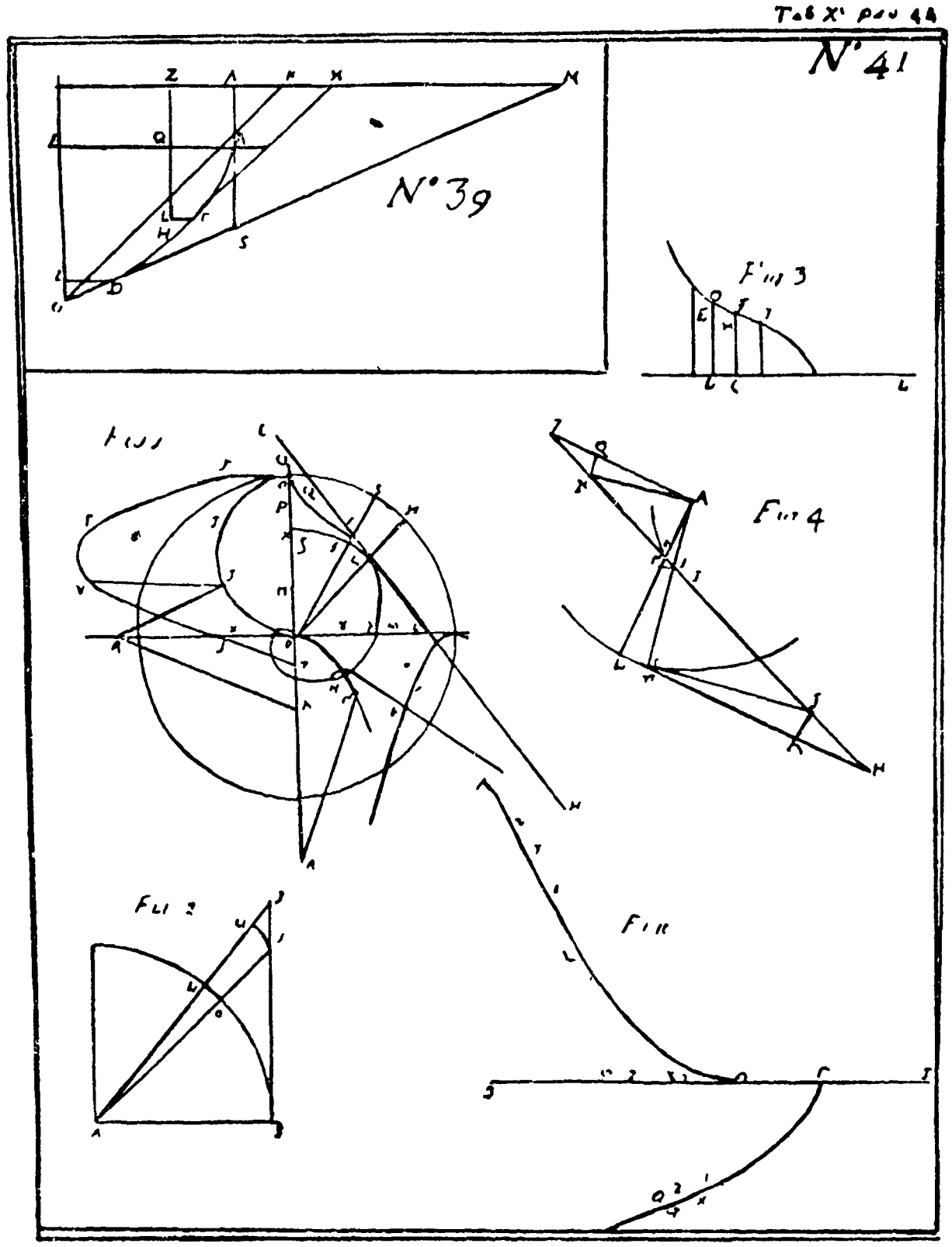


Рис. 89. Плоские кривые в «Сочинениях» Я. Бернулли.

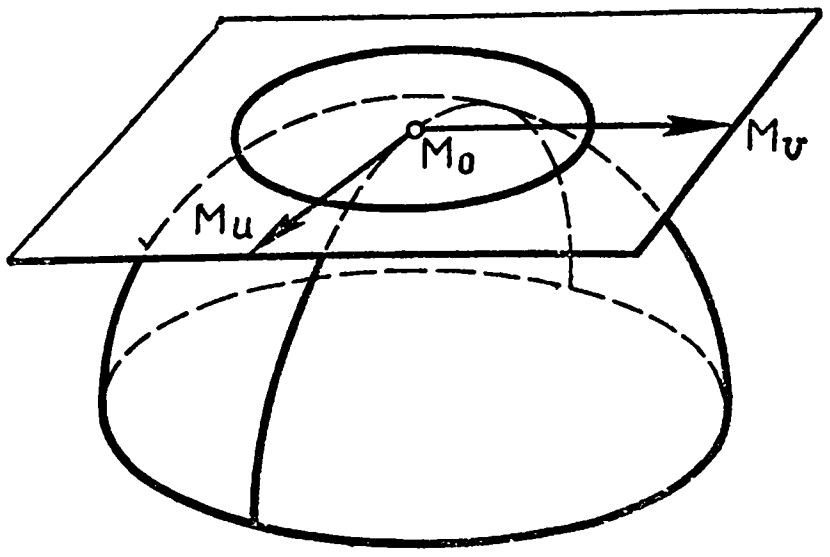


Рис. 90.

также выражение радиуса кривизны в геометрической форме. Точки перегиба впервые рассматривал в 1668 г. голландский математик Рене де Слюз (1622—1685), затем П. Ферма.

В своем «Новом методе» (1684) Лейбниц уже связывает понятие точки перегиба с соотношением $d^2y = 0$, а в другой работе 1686 г. он впервые говорит о соприкасающейся окружности. Лейбниц и его сотрудники, братья Якоб и Иоганн Бернулли, в основном и завершили теорию плоских кривых (рис. 89). Теория пространственных кривых была основана А. К. Клеро в его труде «О кривых двоякой кривизны» (1731) и развита затем в трудах Эйлера, Монжа, Ланкре (1774—1808), Коши, Френе (1816—1900) и других математиков XIX в. Основы общей теории поверхностей были заложены Эйлером и развиты Монжем, Гауссом, Петерсоном, Риманом и другими учеными XIX—XX вв.

Понятие поверхности было на протяжении многих веков весьма туманным. Хотя «автономная поверхность» упоминается уже в I книге «Начал» Евклида и встречается у Аристотеля, тем не менее истинное геометрическое содержание этого понятия нелегко и очень медленно раскрывалось учеными. С наибольшей полнотой оно было разработано лишь в прошлом столетии в трудах К. Ф. Гаусса.

Определение поверхности как г р а н и ц ы т е л а восходит к Аристотелю. Древнегреческие математики рассматривали поверхность не как самостоятельный геометрический образ, а в тесной связи с самим телом, ею ограниченным. Призма и пирамида, цилиндр и конус в «Началах» Евклида, как и коноиды и сфероиды (эллипсоиды, параболоиды и двуполостные гиперболоиды вращения[1], в трудах Архимеда — это не поверхности, а тела. Лишь в XVIII в., с созданием пространственной аналитической геометрии[2], понятие поверхности становится по-настоящему автономным, независимым от понятия тела. Аналогично линии, поверхность определяется как самостоятельный геометрический образ, как геометрическое место точек пространства, удовлетворяющих тому или иному уравнению.

Один из создателей трехмерной аналитической геометрии, Л. Эйлер, впервые применил понятие кривизны и к поверхностям;

---

[1] Однополостной гиперболид вращения — цилиндроид — впервые рассматривал Валлис, трехосные эллипсоиды и гиперболоиды, как и гиперболический параболоид, — Эйлер.

[2] См. гл. IV, § 10.

соответствующие результаты были им изложены в работе «О кривизне поверхности», опубликованной в 1767 г.

Искривление поверхности в какой-либо ее точке M можно рассматривать как степень ее отклонения от касательной плоскости в данной точке (рис. 90). Это отклонение может оказаться различным для различных направлений, определенных различными линиями поверхности, исходящими из точки M_0. С кривизной этих линий связывают поэтому и понятие кривизны поверхности.

Нормальными сечениями поверхности называются кривые, полученные от пересечения поверхности плоскостями, проходящими через ее нормаль (перпендикуляр к касательной плоскости) в точке M. Кривизна сечения считается положительной, если вогнутость направлена в сторону ориентированной нормали, и отрицательной в противном случае. Так, на рисунке 91 кривизна линии MA положительна, MB — отрицательна. Каждое нормальное сечение определяется одним параметром, допустим углом φ, образованным его плоскостью с некоторым фиксированным лучом в касательной плоскости. Кривизна $\frac{1}{\rho}$ каждого нормального сечения зависит от φ. Эйлер установил, что в каждой точке поверхности существуют два таких взаимно перпендикулярных направления, что кривизны $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$ соответствующих нормальных сечений, называемые *главными кривизнами поверхности*, представляют собой максимальное и минимальное значения кривизны всех нормальных сечений в этой точке и что кривизна $\frac{1}{R}$ любого нормального сечения выражается через главные кривизны формулой

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}, \tag{5}$$

где φ — угол, образованный рассматриваемым нормальным сечением с сечением кривизны $\frac{1}{R_1}$.

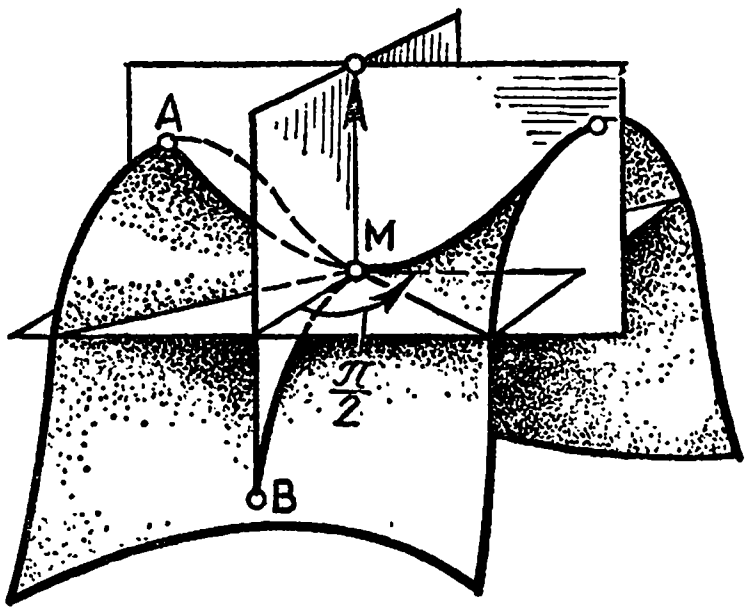


Рис. 91.

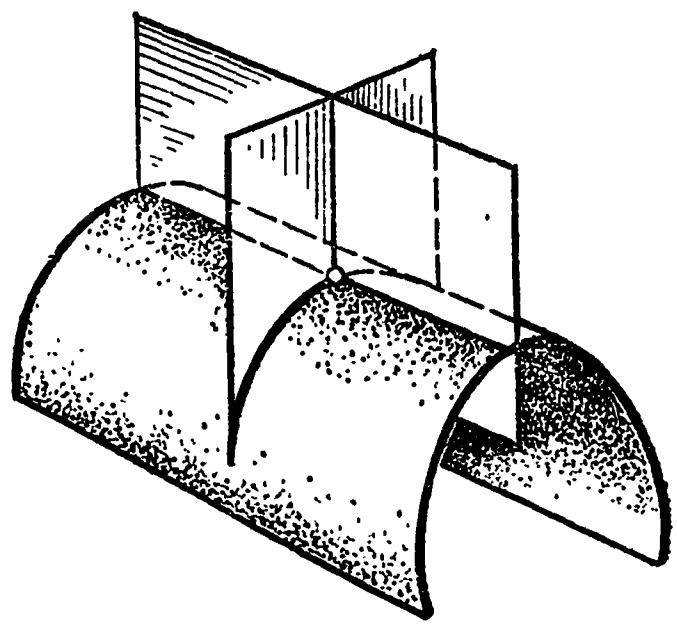


Рис. 92.

Теорема Эйлера (5) показывает, что для определения радиуса кривизны R любого нормального сечения достаточно знать положение секущей плоскости (угол φ) и два главных радиуса кривизны: R_1 и R_2. Если R_1 и R_2 имеют одинаковые знаки, то и R будет иметь тот же знак. Соответствующая точка поверхности называется *эллиптической*; все сечения в этом случае направлены в одну сторону касательной плоскости, как это имеет место для *эллипсоида*, располагающегося (рис. 90) целиком по одну сторону от касательной плоскости. Если R_1 и R_2 имеют разные знаки, то R может быть и положительным и отрицательным, а это значит, что нормальные сечения будут лежать то выше, то ниже касательной плоскости. Такая точка поверхности называется *гиперболической*. Такова, например, точка M седлообразной поверхности второго порядка, называемая гиперболическим параболоидом (рис. 91) и расположенная по обе стороны от соответствующей касательной плоскости. Если $\frac{1}{R_1}$ или $\frac{1}{R_2}$ обращается в нуль, то кривизна $\frac{1}{R}$ имеет постоянный знак, так как

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin^2\varphi}{R_2}\left(\text{или } \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1}\right).$$

Однако при $\varphi = 0\left(\text{ или } \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{R} = 0$. Такая точка называется *параболической*, поверхность имеет вблизи ее почти цилиндрическую форму (рис. 92).

Работа Эйлера оказала большое влияние на дальнейшее развитие дифференциальной геометрии, главным образом на школу геометров, основанную в Мезьере (Франция) Гаспаром Монжем, членом Парижской Академии наук и одним из основателей начертательной геометрии. Геометрические работы Монжа были тесно связаны с практическими потребностями инженерного дела. Следует иметь в виду, что Монж был профессором Военной академии, затем одним из основателей и директоров Политехнической школы Парижа, готовившей высшие технические кадры Франции и ставшей одним из важнейших центров математического творчества первой половины XIX в.; влияние этой школы распространилось далеко за пределы Франции. Связь научной деятельности Монжа с практической жизнью объясняется и тем, что он был виднейшим общественным деятелем своей страны. В период французской революции Монж был сенатором и морским министром, заведовал пушечными и пороховыми заводами, принимал активное участие в развитии новой, метрической системы мер и весов и участвовал в египетском походе Наполеона. Когда наступил период реставрации монархии во Франции, М о н ж, как старый республиканец, был изгнан из Политехнической школы и Академии наук и лишен всех прав. Первая его работа по дифференциальной геометрии — «Мемуар о развертках, радиусах кривизны и различного рода перегиба кривых двоякой кривизны», написанная в 1771 г., была посвящена

Г. Монж

Ш. Дюпен

теории пространственных кривых. Здесь были введены среди других понятие *соприкасающейся сферы*, термины: *геометрическое место центров кривизны*, *развертывающаяся поверхность* и др. Эта работа была опубликована лишь в 1785 г. Монжу долгое время власти запрещали печатать свои труды из-за опасения, что иностранцы воспользуются ими для применения их в практических и военных целях. Важнейший труд Монжа «Приложения анализа к геометрии», впервые опубликованный в 1807 г.[1], был написан им еще в 1794 и 1795 гг. на основе лекций, прочитанных студентам Политехнической школы и издававшихся рядом отдельных выпусков. Эта работа Монжа представляет собой первое систематическое изложение теории поверхностей. Основная идея «Приложений» заключается в переводе геометрических фактов на язык дифференциальных уравнений в частных производных и обратно, в истолковании таких уравнений с помощью геометрических кривых и поверхностей. Так, проблемы исследования *цилиндрических* и *конических* поверхностей приводят Монжа к дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка; вопросы *развертывающихся* поверхностей (т. е. таких, которые при помощи изгибания могут быть наложены, развернуты на плоскость) — к таким же уравнениям второго порядка; *линейчатые поверхности* (т. е. такие, которые образуются движением прямой по некоторой направляющей линии) — к уравнениям третьего порядка. Монж впервые ввел понятие и термин линий кривизны поверхности. Это линии, имеющие в каждой своей точке главное направление. В «Приложениях» впервые рассматривается

[1] На русском языке эта книга в переводе М. Я. Выгодского была опубликована в 1947 г.

понятие семейства поверхностей и характеристик — кривых пересечения бесконечно близких поверхностей семейства. Любопытно отметить, что в этой своей работе Монж применяет для исследования поверхностей не только *аналитические* средства, т. е. не только аппарат аналитической геометрии, дифференциальное и интегральное исчисление, но и собственно геометрические синтетические конструктивные и графические методы. По этому поводу Монж как-то сказал: «Если бы мне пришлось снова начать эту работу, я напечатал бы ее в два столбца, в первом я поместил бы решения задач путем вычислений, а во втором — решения тех же задач, но исполненных путем графических построений». Работы Монжа по дифференциальной и синтетической геометрии продолжали его ученики: Л. Карно, Ж. Менье (1754—1793), Ш. Дюпен (1784—1873), Ж. Понселе и др.

Жан Менье, впоследствии член Парижской Академии наук и и генерал французской армии, под влиянием работ Эйлера изучавший свойства кривизны плоских сечений поверхности, открыл важнейшую теорему, носящую его имя. Теорема Менье связывает кривизну $\frac{1}{\rho}$ произвольного плоского сечения ρ поверхности, определенного некоторой плоскостью Q (рис. 93), проходящей через прямую l касательной плоскости к поверхности в ее точке M, с кривизной $\frac{1}{R}$ нормального сечения, определенного плоскостью Q', проходящей через ту же касательную l. Если обозначить через Θ угол, образованный плоскостью Q с нормалью к поверхности в точке M, то теорему Менье можно выразить формулой

$$\rho = R\cos\Theta. \qquad (6)$$

Можно далее доказать, что кривизна любой кривой на поверхности, проходящей через точку M и для которой Q является соприкасающейся плоскостью, совпадает с кривизной линии ρ.

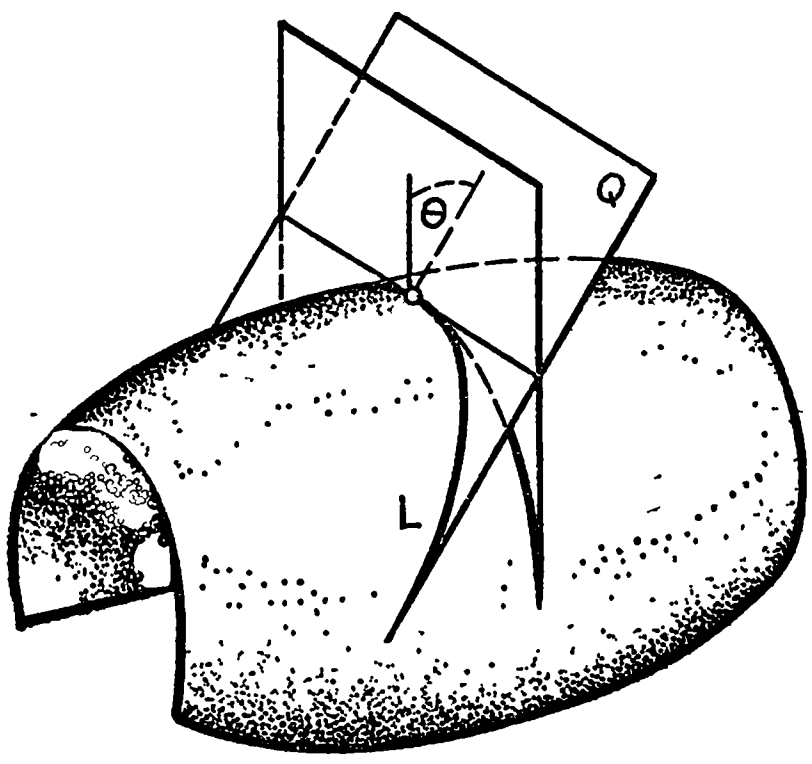


Рис. 93.

Итак, зная главные радиусы кривизны R_1 и R_2 поверхности в какой-либо ее точке, можно с помощью теорем Эйлера и Менье определить кривизну любой кривой на поверхности, проходящей через данную точку. Кривизна поверхности в каждой ее точке характеризуется, таким образом, двумя числами: R_1 и R_2.

Новое направление исследованиям по теории поверхностей дал Карл Фридрих Гаусс, который оставил глубокие следы почти во всех областях математики

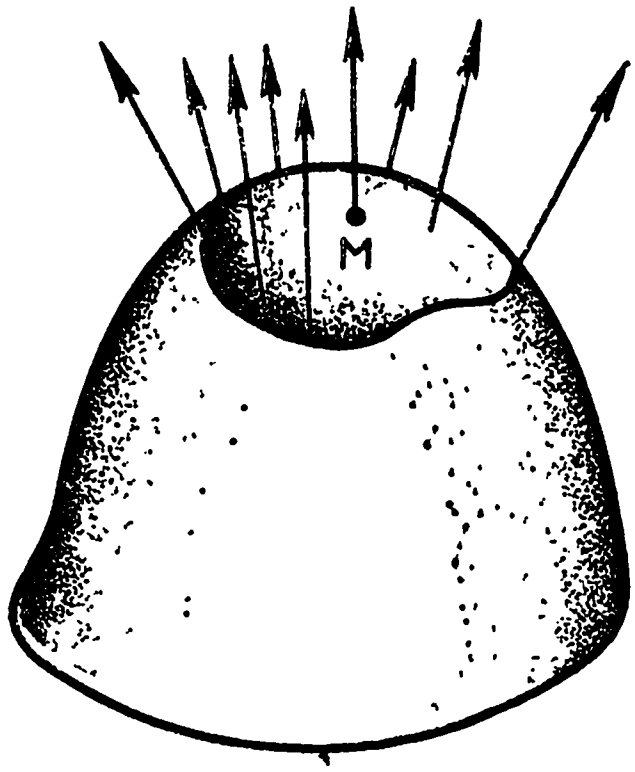


Рис. 94.

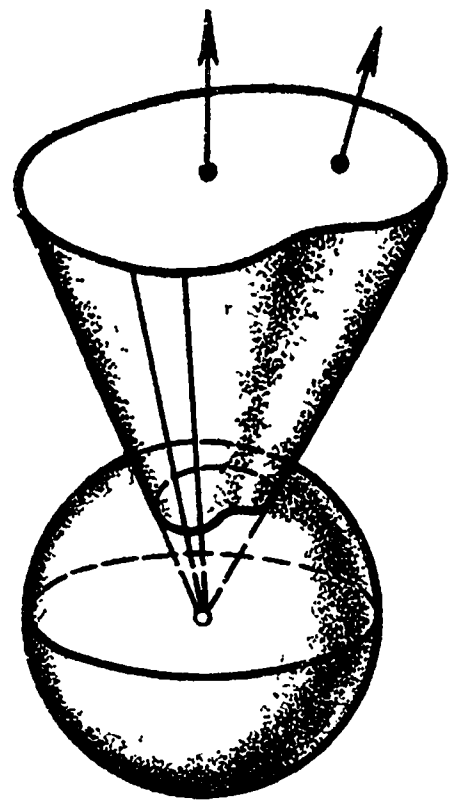


Рис. 95.

и в исследованиях которого теоретическая и прикладная математика тесно переплетались. По поручению правительства Ганноверского королевства Гаусс с начала 20-х годов прошлого столетия на протяжении 6—7 лет усердно занимался геодезическими измерениями и исследованиями. Последние привели Гаусса к опубликованию среди других и важнейшего его труда по дифференциальной геометрии — «Общие исследования относительно кривых поверхностей» (1827), в котором было положено начало новой, так называемой «внутренней геометрии» поверхностей, на которой следует остановиться несколько подробнее.

Гаусс охарактеризовал кривизну поверхности в какой-либо ее точке одним числом k, представляющим собой произведение главных кривизн, т. е.

$$k = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}. \qquad (7)$$

Это так называемая *полная*, *главная*, или *гауссова*, кривизна поверхности в данной точке. К понятию полной кривизны Гаусс пришел, установив, что отношение элемента поверхности сферического изображения к соответствующему элементу данной поверхности равно отношению 1 к R_1R_2. Это можно уяснить себе примерно так.

Рассмотрим небольшую область D (рис. 94) некоторой поверхности S в окрестности ее точки M. Пусть ΔS — площадь области D. Проведем в каждой точке D нормаль к S и отложим все эти нормали из центра O единичной сферы G, тогда получим некоторый телесный (пространственный) угол с вершиной в точке O (рис. 95), за величину $\Delta\sigma$ которого примем площадь вырезаемой (пересекаемой) им соответствующей сферической области D'. Нетрудно усмотреть, что чем сильнее искривлена данная поверхность в обла-

сти D, тем больше будут расходиться во все стороны ее нормали и тем больше будет $\Delta\sigma$. Вот почему отношение $\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$ дает среднюю кривизну области D; предел же этого отношения при стягивании области D в точку M, т. е.

$$\lim_{D\to M}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s},$$

естественно принять за меру кривизны поверхности в точке M. Большая заслуга Гаусса и состояла в том, что этот предел, оказавшийся равным $|k|$, он ввел по определению как полную кривизну поверхности в точке M и доказал, что k *сохраняется при изгибании* поверхности, т. е. при любой ее деформации, происходящей без разрывов и растяжений. Эта теорема была названа Гауссом *theorema egregium* — «замечательной теоремой». Она означает, что у двух с помощью изгибания наложенных одна на другую поверхностей одинакова полная кривизна в соответственных точках, и наоборот. Если же поверхности имеют разную гауссову кривизну, то никакими изгибаниями не удастся наложить их друг на друга.

Из вышеизложенного следует, что в эллиптической точке гауссова кривизна положительна, в гиперболической она отрицательна, а в параболической равна нулю. В дифференциальной геометрии доказывается, что поверхности нулевой кривизны (примерами которых могут служить плоскость, цилиндр, конус и т. д.) все налагаются на плоскость, все являются развертывающимися поверхностями. Геометрия их подчиняется одним и тем же законам. Наоборот, кусок эллиптической поверхности, например кусок сферы, имеющей, как мы знаем, положительную гауссову кривизну, никаким изгибанием нельзя наложить на плоскость; это и говорит о том, что законы, формулы сферической геометрии отличны от формул геометрии на плоскости.

Кроме гауссовой кривизны, есть и другие величины, сохраняющиеся при изгибании поверхности, в первую очередь длины отрезков кривых на ней, затем площади ее фигур и т. п. В этом нетрудно наглядно убедиться, если начертить на листе бумаги произвольные линии и фигуры и произвести какое-либо изгибание плоского листа, свернув его, например, в цилиндр. Все такие свойства, не изменяющиеся при изгибании поверхности, были названы *внутренними* свойствами поверхности. Эти свойства связаны с самой структурой поверхности и отличны от тех, которыми она обладает как поверхность, вложенная в евклидово трехмерное пространство. Исключительным достижением Гаусса является именно открытие того факта, что, помимо обычной геометрии, изучающей форму поверхности так, как она нам представляется и з в н е, существует более глубокая, *внутренняя геометрия поверхности*, изучающая самые существенные, внутренние ее свойства. Исследуя их, не выходя за пределы самой поверхности, подобно тому как в планиметрии, являющейся внутренней геометрией плоскости, мы изу-

чаем свойства плоских фигур независимо от того, где и как сама плоскость расположена в пространстве. К внутренней геометрии плоскости относятся, в частности, понятия длины отрезка кривой, величины угла, площади фигуры и т. п. Такие же понятия входят в предмет внутренней геометрии любой поверхности, длина кривой является при этом исходным понятием. В частности, роль прямых на плоскости играют так называемые геодезические линии на поверхности. Сходство между прямыми плоскости и геодезическими произвольной поверхности выражаются в следующем: 1) достаточно малые дуги геодезических, как и отрезки прямых, представляют собой кратчайшие расстояния между двумя точками поверхности; 2) при отсутствии действия какой-либо другой силы, кроме реакции поверхности, точка движется на последней по геодезической линии аналогично прямолинейному движению по инерции свободной точки.

Внутренняя геометрия поверхности позволила установить много других важных свойств геодезических линий. Разумеется, все результаты, о которых идет речь, были достигнуты Гауссом аналитическими средствами, путем применения анализа, в частности теории дифференциальных уравнений. При этом декартовы координаты, с успехом применяемые на плоскости, оказались неудобными для изучения внутренних свойств любой поверхности. В связи с этим Гаусс впервые широко применил и развил метод так называемых криволинейных координат, который состоит в следующем.

На самой поверхности вводится координатная сеть кривых линий u и v, предполагаемая правильной[1], подобно координатной сети прямых x и y на плоскости (рис. 96). Каждая точка M поверхности определяется двумя значениями (числами): u, v, названными Гауссом ее *криволинейными координатами*, например $M(u_3, v_2)$. Любая координатная линия u (или v) определяется уравнением $v = \text{const}$ ($u = \text{const}$), подобно тому как на плоскости любая линия, параллельная оси Ox (или Oy), изображается уравнением $y = \text{const}$ ($x = \text{const}$). Частным случаем криволинейных координат является издавна известная система географических координат — широта и долгота, — в которой координатная сеть кривых линий состоит из меридианов и параллелей. Любое уравнение между криволинейными координатами u и v

$$f(u, v) = 0 \qquad (8)$$

представляет некоторую кривую на поверхности, подобно тому как такое же уравнение для декартовых координат определяет

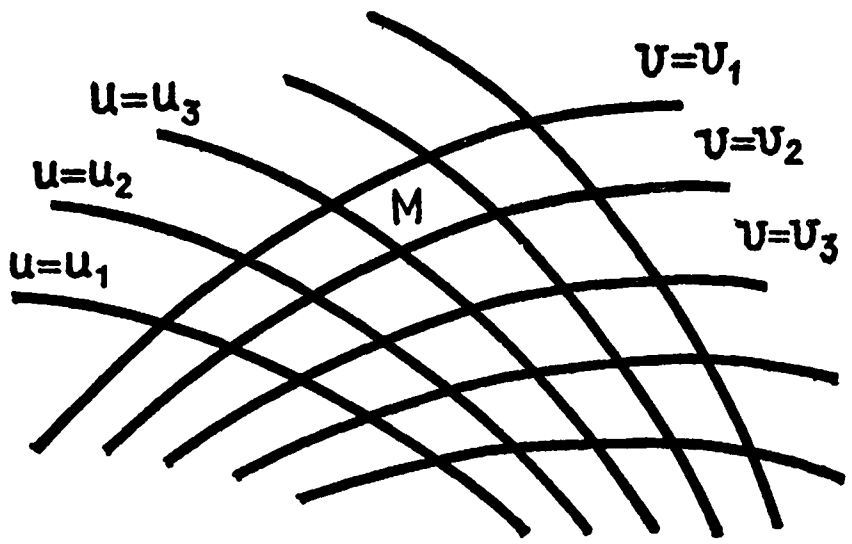


Рис. 96.

[1] То есть: 1) никакие две линии u (или v) не имеют общих точек; 2) каждая линия u пересекает каждую линию v только один раз.

кривую на плоскости. Аналогично

$$u = \varphi(t), \quad v = \psi(t) \tag{9}$$

являются параметрическими уравнениями кривой на поверхности.

Как известно из аналитической геометрии в пространстве, поверхность определяется в декартовых координатах одним уравнением

$$F(x, y, z) = 0 \tag{10}$$

или, разрешая при возможности это уравнение относительно z, уравнением

$$z = f(x, y). \tag{11}$$

Пространственные координаты x, y, z каждой точки будут в свою очередь функциями от u, v; таким образом, поверхность может быть определена также с помощью трех уравнений[1]:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \varkappa(u, v). \tag{12}$$

Учение о сферической геометрии возникло еще в древности и связано с потребностями астрономии и географии. В труде Феодосия (I в. до н. э.) «Сферика» впервые встречается понятие сферического треугольника. В одноименном труде Менелай (I—II вв). доказал, что сумма внутренних углов сферического треугольника больше двух прямых. Сферическая тригонометрия была развита в средние века в странах Ближнего и Среднего Востока. В новое время ею занимались ряд виднейших европейских математиков. Так, в «Новом открытии в алгебре» (1629) бельгийский математик Альберт Жирар вывел следующую формулу для выражения площади S сферического треугольника через его углы A, B, C:

$$S = R^2(A + B + C - \pi), \tag{13}$$

где R — радиус сферы. Большой вклад в развитие сферической геометрии внес Л. Эйлер и его петербургские ученики — академик А. И. Лексель (1740—1781), Н. И. Фусс (1775—1826) и др.

В 1839 г. Фердинанд Миндинг (1806—1885), профессор университета в Дерпте (бывший Юрьев, ныне Тарту Эстонской ССР), опубликовал работу под заглавием «Как установить, наложимы ли друг на друга две данные поверхности, с замечаниями о поверхностях постоянной кривизны». В этой работе были впервые изучены *поверхности* (вращения) *постоянной отрицательной кривизны*. В другой своей работе — «К теории кратчайших линий на кривых поверхностях» (1860) Миндинг установил, что тригонометрические формулы на поверхности постоянной отрицательной кривизны мо-

---

[1] В современных учебниках вместо трех уравнений (12) вводится одно векторное $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, однако во времена Гаусса векторное исчисление еще не применялось в математике.

гут быть получены из формул сферической тригонометрии, если принять за радиус сферы не R, а iR. Результатами Миндинга воспользовался Е. Бельтрами. Он исходил из следующих фактов внутренней геометрии поверхностей: 1) всякая поверхность постоянной гауссовой кривизны может передвигаться в самой себе, т. е. каждая ее точка может быть совмещена с любой другой ее точкой; 2) плоскость и развертывающаяся поверхность являются поверхностями постоянной нулевой кривизны; они несут на себе геометрию Евклида; 3) сфера представляет собой поверхность постоянной положительной кривизны. Естественно, возник вопрос: какую же геометрию несут на себе поверхности постоянной отрицательной кривизны? Бельтрами первый заметил связь между внутренней геометрией поверхностей постоянной отрицательной кривизны и геометрией Лобачевского. В 1868 г. Бельтрами в одной из своих работ вычислил линейный элемент плоскости Лобачевского и установил, что гауссова кривизна этой плоскости во всех ее точках одинакова и равна $-\frac{1}{R^2}$, т. е. что эта кривизна постоянна и отрицательна. Поверхности постоянной отрицательной кривизны Бельтрами назвал *псевдосферами*. Таким образом была найдена первая (хотя и неполная) интерпретация гиперболической[1] геометрии. Геометрия плоскости Лобачевского могла быть рассмотрена как внутренняя геометрия псевдосферы.

Обобщению понятия поверхности и дальнейшему развитию теории поверхностей в большой мере способствовали труды замечательного немецкого математика Бернхарда Римана, воспитанника и затем профессора Геттингенского университета. Его работы оказали огромное влияние на развитие математики во второй половине XIX и в XX в. Он положил начало новому, геометрическому направлению в развитии теории функций комплексного переменного, разработал теорию конформных отображений и является одним из основателей теории дифференциальных уравнений и топологии. В знаменитой своей лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», прочитанной в 1854 г. в Геттингенском университете и опубликованной посмертно в 1866 г., Риман вводит понятие многообразия как совокупности элементов, объектов любой природы, каждый из которых может быть определен несколькими вообще n числами. Такие многообразия называют n-мерными пространствами. Так, всякую поверхность можно рассматривать как двумерное пространство; обычное пространство является трехмерным. Таким же является множество всех окружностей на плоскости, так как каждая окружность вполне определяется тремя числами: двумя координатами центра и величиной радиуса. Множество всех прямых в обычном пространстве уже представляет собой пример четырехмерного пространства, так как для определения положения прямой

---

[1] Термин этот и объясняется тем, что точки таких поверхностей с отрицательной кривизной все гиперболические.

К. Петерсон

в пространстве требуется по крайней мере четыре числа. (Какие?) Мы уже знаем, что кривая второго порядка определяется пятью точками, поэтому можно сказать, например, что множество всех гипербол плоскости есть пятимерное пространство. Таким образом, можно говорить не только о двумерной или трехмерной геометрии точек, но и о четырехмерной геометрии прямых или сфер, о трехмерной геометрии цветов и т. д. Риман рассматривает геометрию как учение о непрерывных многообразиях n-мерного порядка. Важнейшей заслугой Римана является то, что он указал основной принцип для измерения длин в любой геометрии, вводя понятия дифференциала расстояния между элементами многообразия. Множество, в котором установлена такая (риманова) метрика, называют *римановым пространством*, а соответствующую геометрию — *римановой геометрией* в широком смысле слова. Риман установил понятие кривизны в каждой точке такого пространства. Среди простейших римановых пространств числятся, кроме обычной евклидовой геометрии, также геометрия Лобачевского и эллиптическая геометрия, называемая также геометрией Римана[1] в узком смысле. Геометрия Римана нашла одно из важнейших своих применений в теории относительности Эйнштейна[2].

Среди видных математиков второй половины XIX в., внесших важный вклад в развитие дифференциальной геометрии, следует отметить Карла Михайловича Петерсона (1828—1881), ученика Миндинга и одного из учредителей Московского математического общества. В своей кандидатской диссертации «Об изгибании поверхностей» (1853) он изложил некоторые результаты, позже вновь найденные итальянскими математиками Г. Майнарди (1800—1879) и Д. Коданци (1824—1873). Петерсон открыл также новый класс поверхностей, так называемых поверхностей Петерсона.

Одним из первых членов Московского математического общества был геометр и ботаник Василий Яковлевич Цингер (1836—1907), ставший в 1886 г. президентом общества и написавший ряд работ по геометрии и механике. Будучи профессором Московского университета, Цингер собрал ряд учеников, продолжавших разработку идей Петерсона. Из них следует упомянуть Болеслава Корнелиевича Млодзеевского (1858—1923) и Дмитрия Федоровича

---

[1] См. ч II, § 20.

[2] См., например: Жуков А. И. Введение в теорию относительности. М., 1961.

Егорова (1869—1931). Последний создал московскую школу теории функций, но многие его труды относятся к дифференциальной геометрии.

В XX в. стали разрабатываться также проективная дифференциальная геометрия и аффинная дифференциальная геометрия, изучающие свойства кривых и поверхностей, сохраняющиеся при проективных, соответственно афинных преобразованиях, подобно тому как классическая дифференциальная геометрия исследует свойства, сохраняющиеся при любых движениях. Одним из создателей современной проективно-дифференциальной геометрии был профессор Московского университета и глава большой школы советских геометров Сергей Павлович Фиников (1883—1964), получивший ряд фундаментальных результатов и в классической дифференциальной геометрии. Этой школой теперь руководит ученик Финикова — Герман Федорович Лаптев.

Большую дифференциально-геометрическую (тензорную) школу создал в середине 20-х годов текущего века профессор Московского университета Вениамин Федорович Каган. Ученики Кагана, Виктор Владимирович Вагнер и Александр Петрович Норден, создали геометрические школы, первый — в Саратове, второй — в Казани. Руководство школой Кагана в Москве принял на себя один из его учеников — Петр Константинович Рашевский (р. 1907).

Вопросы дифференциальной геометрии успешно разрабатывали и Петр Алексеевич Широков (1895—1944), и Сергей Сергеевич Бюшгенс (1882—1952) — кинематическая геометрия, и Яков Семенович Дубнов (1887—1957).

Сложившаяся к концу прошлого столетия теория кривых и поверхностей, так называемая ныне *классическая* дифференциальная геометрия, является в основном геометрией в малом: она исследует достаточно малые участки геометрических образов. В XX в. появились новые направления в теории кривых и поверхностей, успешно развивалась геометрия в целом — изучение свойств целых поверхностей. В самом начале века один из представителей геттингенской математической школы — профессор Герман Минковский (1864—1909) разработал основы геометрии выпуклых тел, к которой он пришел от так называемой геометрии чисел, в которой для решения трудных вопросов теории чисел применяются геометрические методы. Наибольшую славу принесли Минковскому его «Пространство и время» и другие работы, в которых изложены геометрические интерпретации кинематики специальной теории относительности Эйнштейна и уравнений Максвелла.

К геометрии в целом относятся труды советских математиков Льва Генриховича Шнирельмана и Лазаря Ароновича Люстерника. Большой вклад в эту отрасль математики внесли труды ленинградской геометрической школы, в частности труды академика Александра Даниловича Александрова и его учеников, труды харьковской геометрической школы, возглавляемой

лауреатом Ленинской премии академиком Алексеем Васильевичем Погореловым, и труды московской школы геометрии, возглавляемой Николаем Владимировичем Ефимовым.

В XX в. начала также бурно развиваться новая геометрическая дисциплина — топология. О ней речь ниже.

§ 23. РАЗВИТИЕ ТОПОЛОГИИ. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Геометрическое мышление всегда, по самому характеру понятия геометрической фигуры, было абстрактным.

П. С. Александров

Топология, оформившаяся как самостоятельная математическая дисциплина на пороге XX в., является одной из самых абстрактных ветвей не только геометрии, но и всей современной математики.

Мы уже знаем, что вопросы изображения пространственных фигур и перспективы привели еще в первой четверти прошлого века Ж. В. Понселе к выделению в особый класс проективных свойств фигур[1]. Проективные свойства оказались более общими и более прочными, чем метрические и аффинные свойства. При проективном преобразовании фигуры метрические и аффинные ее свойства могут исчезнуть, в то время как более глубокие проективные ее свойства сохраняются. Около середины XIX в. в связи с развитием теории поверхностей и теории аналитических функций комплексного переменного началось систематическое изучение еще более глубоких и стойких, так называемых *топологических* свойств фигур, сохраняющихся при более резких преобразованиях (при любых деформациях, уничтожающих не только метрические и аффинные, но даже и проективные свойства фигур), производимых без разрывов и склеиваний. Иными словами, топологические свойства, изучением которых и занимается топология, — это те свойства, которые остаются инвариантными при любом *топологическом преобразовании*, под которым можно понимать любой изгиб, сжатие, расширение, искажение размеров и формы фигуры и всякое вообще преобразование, лишь бы сохранялись отношения *прикосновения, бесконечной близости*, т. е. *взаимная непрерывность* (отсутствие разрывов) и взаимная однозначность (отсутствие какой-либо спайки, склеивания). Такие преобразования называются также гомеоморфными или гомеоморфизмами (от греческих слов «гомойос» — подобный и «морфе» — вид, форма, строение). Итак, математически выражаясь, при гомеоморфном преобразовании выполняются следующие два условия: 1) каждая точка одной фигуры переводится в одну и только в одну точку другой фигуры; 2) точ-

---

[1] См. ч. II, § 21.

ка M, бесконечно приближающаяся к какой-либо фиксированной точке K одной из фигур, переводится в точку M' другой фигуры, также бесконечно приближающуюся к точке K', соответствующей точке K.

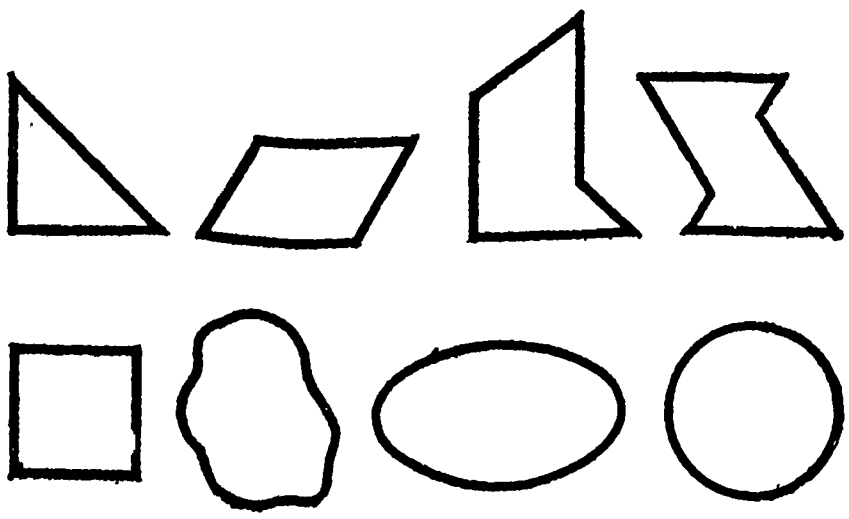


Рис. 97.

Последнее условие, взаимная непрерывность, сохранение бесконечной близости между переменной и фиксированной точками, сохранение отношения прикосновения частей фигуры и является важнейшей идеей, лежащей в основе топологии. Чтобы наглядно представить себе топологическое (гомеоморфное) преобразование, возьмем, например, замкнутую прочную резиновую нить и придадим ей поочередно форму треугольника, квадрата, шестиугольника, окружности (большего и меньшего радиуса), эллипса и т. п. (рис. 97). Все эти фигуры гомеоморфны, т. е. одинаковы с топологической точки зрения. Такими же будут в пространстве, например, куб, сфера, эллипсоид и цилиндр (при этом имеется в виду *полная* поверхность цилиндра). Однако невозможно с помощью деформации превратить окружность ни в линию, имеющую форму восьмерки, ибо для этого нужно было бы *склеить* две ее точки (и таким образом, нарушилась бы взаимная однозначность), ни в отрезок прямой, так как для этого пришлось бы разорвать окружность (и тем самым нарушить взаимную непрерывность). Вот почему говорят, что окружность и прямолинейный отрезок или окружность и лемниската (восьмерка) — топологически различные фигуры. Не гомеоморфными между собой будут также поверхность сферы и боковая поверхность цилиндра, поверхность сферы и поверхность тора (рис. 98, *а*). Действительно, если начертить на сферической поверхности произвольную замкнутую линию и сделать по ней разрез, то сфера распадается на две части, между собой не связанные. Тор же, как легко констатировать, этим свойством не обладает. Следует тут же отметить, что понятие топологического преобразования не совпадает с понятием деформации: первое шире второго. Например, если до всякой деформации разрезать окружность в какой-то одной точке, как-то заузлить ее без соприкосновения линий и снова заклеить в точке разреза, то полученная замкнутая линия гомеоморфна окружности, однако с помощью одной лишь деформации, т. е. изгибания, сжатия, расширения и перемещения, перевести одну из этих линий в другую невозможно.

а) *б)*

Рис. 98.

Идею изучения топологических свойств фигур можно усмотреть в письме Лейбница к Гюйгенсу от 1679 г., в котором говорится о новом, геометрическом или линейном анализе (исчислении) для изучения свойств, связанных не с величинами (метрические свойства), а с местом (положением). От Лейбница берет свое начало и прежнее наименование топологии *analysis situs* (*анализ положения*).

Термин «топология» (по-гречески «топос» то же, что по-латыни, *situs* — «место») был впервые введен немецким физиком, математиком и астрономом Иоганном Бенедиктом Листингом (1808—1882) в своей небольшой книге «Предварительные исследования по топологии», изданной в 1847 г. Это первая печатная работа по топологии, предмет которой автор так определяет: «Под топологией будем понимать учение о модальных (т. е. топологических) отношениях пространственных образов или о законах связности, взаимного положения и следования точек, линий, поверхностей, тел и их частей или их совокупности в пространстве независимо от отношений мер и величин». В своей работе Листинг исследует так называемые им линейные комплексы, т. е. «любые прямые или кривые линии или совокупность таких линий». Независимо от Листинга и примерно одновременно с ним изучением топологических свойств фигур занимался и А. Мёбиус, о котором пойдет речь ниже.

Одним из простейших понятий топологии является понятие связности. Фигура называется *связной*, если она состоит из одного цельного куска, например: прямолинейный отрезок, окружность и все фигуры рисунка 97. *Несвязной* называют фигуру, состоящую из нескольких отдельных и не связанных между собой кусков (компонент), например фигура, состоящая из совокупности точек прямолинейного отрезка, из которого изъята какая-либо точка, не лежащая на его конце. Действительно, ни одна точка, допустим, левого отрезка не бесконечно близка к правому отрезку, так как находится на конечном расстоянии от него, т. е. отрезок разбивается на две части — компоненты: Поэтому говорят, что все точки отрезка являются *разбивающими*; наоборот, окружность не имеет ни одной разбивающей точки, так как изъятие произвольной ее точки не нарушает ее связности. Лемниската, например, имеет точно одну разбивающую точку (узловая ее точка), удаление которой (вместе с ее окрестностью) разбивает фигуру на две компоненты, в то время как при изъятии любой другой точки лемнискаты последняя остается связной. Число разбивающих точек, как и число компонент, является топологическим инвариантом фигуры, как это доказывается в топологии.

Для того чтобы говорить о других топологических инвариантах, дадим несколько определений.

Простой дугой называют любое множество точек, гомеоморфное отрезку прямой. Легко понять, что две точки простой дуги, а именно ее *концы*, топологически отличны от всех остальных, внутренних ее точек. Действительно, удаление внутренней точки нарушает,

удаление же того или другого конца не нарушает связности дуги. Итак, конец простой дуги — топологический инвариант. Под *линией* будем понимать теперь связную фигуру, составленную из конечного числа простых дуг, не имеющих общих внутренних точек, называемых *регулярными точками* линии. К регулярным причисляются и точки, являющиеся концами точно двух дуг. Точка же, являющаяся концом k ($k > 2$) дуг, т. е. в которой сходятся k дуг линий, называется *точкой индекса k*. Линия, все точки которой регулярны, называется простой *замкнутой линией*; она гомеоморфна окружности. Индекс точки тоже топологически инвариантное понятие. С ним связан другой топологический инвариант — *уникурсальность*. Линия называется *уникурсальной*, если ее можно всю начертить одним росчерком, т. е. непрерывным движением карандаша или пера без повторных прохождений через одну и ту же ее дугу или часть дуги. Доказывается, что необходимым и достаточным условием уникурсальности линии является обладание ею не более чем двумя точками нечетного индекса. С этим фактом и связано решение Эйлером знаменитой задачи о семи мостах (см. § 25, задача 29).

От понятия линии приходят к понятию *линейного*, или *одномерного, комплекса*, т. е. фигуры, состоящей из конечного числа простых дуг (называемых *ребрами* комплекса) и конечного числа точек (*вершин* комплекса) и являющейся обобщением известного из элементарной геометрии понятия ломаной линии. В отличие от последней, однако, линейный комплекс может быть и несвязным, распадаясь на некоторое число связных комплексов, его компонент. Одним из видов линейного комплекса является так называемый *граф*, состоящий из конечного числа точек (вершин), некоторые из которых соединяются простыми дугами (*ребрами*)

Развитие топологии в 50—80-х годах прошлого века тесно связано с именем Римана. С вышеупомянутой работой Листинга, составившей начало топологии, Риман ознакомился, еще будучи студентом Геттингенского университета. В своей докторской диссертации «Основы общей теории функций комплексного переменного» (1851) Риман положил начало геометрическому направлению в развитии теории аналитических функций.

В связи с введением понятия римановой поверхности и с изучением свойств конформных отображений Риман изложил в своей диссертации основные идеи топологии, которые он развил и в некоторых других работах, особенно в своей «Теории абелевых функций» (1857). Говоря здесь об анализе положения (*Analysis situs*[1]), Риман пишет, что под ним следует понимать ту часть, «учения о непрерывно меняющихся величинах», в котором переменные «изучаются совершенно независимо от числовых со-

---

[1] По примеру Римана этим лейбницевым термином пользовались в XIX в. все математики. Термин Листинга «топология» вошел в общий обиход лишь в XX в.

отношений, только лишь с точки зрения возникающих между ними пространственных соотношений взаимного расположения и связности». Риман впервые вводит понятие о д н о с в я з н ы х и м н о г о с в я з н ы х поверхностей, р о д а поверхности и др. Именно он является основоположником топологической теории двумерных поверхностей.

Мы уже знаем, что одно из топологических свойств сферы состоит в том, что разрез по произвольной замкнутой линии, лежащей на этой поверхности, приводит к распадению ее на отдельные связные куски. В связи с этим вводится понятие связности той или иной поверхности, под которым понимают наибольшее число замкнутых линий, которые можно провести на рассматриваемой поверхности так, чтобы ее связность не нарушалась разрезами по этим линиям. На сфере таких линий не существует, поэтому для нее порядок связности равен нулю. На торе можно найти не больше двух таких линий: какой-либо один меридиан и одну параллель тора. Порядок связности тора равен, таким образом, двум. Если в сферической поверхности сделаем пару круглых отверстий («д ы р») и приклеим к ним по краям цилиндрическую трубку («р у ч к у»), то получим поверхность, называемую «с ф е р о й с р у ч к о й» (рис. 98, *б*), порядок связности которой, очевидно, равен 2. Если сделать $2p$ таких отверстий, то получим «с ф е р у с p р у ч к а м и», называемую «н о р м а л ь н о й п о в е р х н о с т ь ю р о д а p» и порядок связности которой равен $2p$. Каждая такая поверхность является в целом своего рода границей двух областей (внутренней и внешней), на которые она разбивает все пространство. Это обстоятельство отражает тот факт, что каждая такая поверхность имеет две стороны: внешнюю и внутреннюю. Если взять, например, поверхность полусферы или поверхность с краями, образованную склеиванием концов A и D, B и C прямолинейной полоски бумаги (рис. 99, *а*), то мы можем одну сторону, допустим внутреннюю, окрасить в красный цвет, а другую — внешнюю — в голубой. Эти краски отделены краями поверхности. Основная теорема топологии поверхностей устанавливает, что любая замкнутая двусторонняя поверхность гомеоморфна некоторой нормальной поверхности рода p (порядка связности $2p$). Итак, понятие рода, как и порядок связности, является топологическим инвариантом.

Мы говорили о двусторонних поверхностях. Существуют, однако, и односторонние поверхности. На них впервые указали Листинг

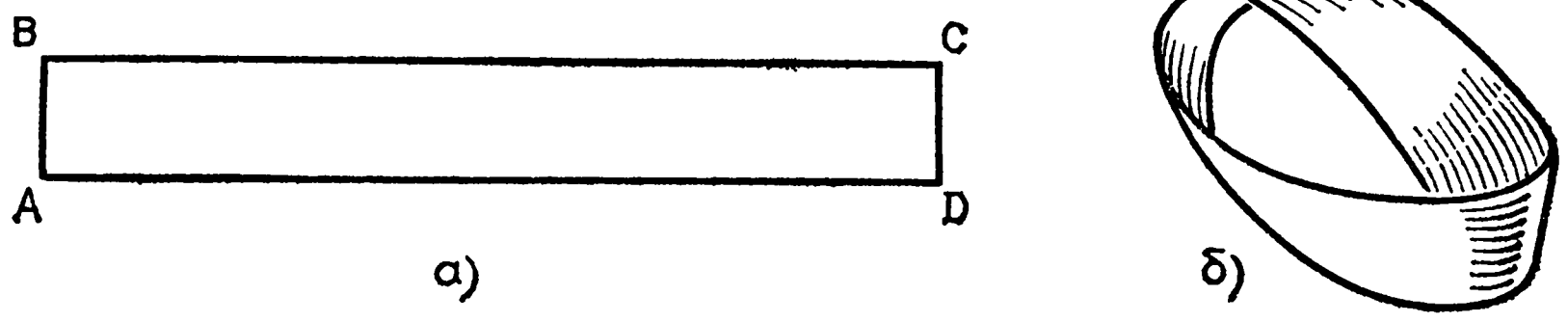


Рис. 99, *а*, *б*.

и независимо от него Мёбиус. Последний в возрасте 68 лет, т. е. в 1859 г., представил Парижской Академии наук мемуар «К теории полиэдров и элементарных преобразований», в котором впервые рассматривался так называемый «лист Мёбиуса» — простейшая односторонняя поверхность. Ее можно получить, перекрутив прямоугольную полоску бумаги и склеив ее меньшие две стороны так, чтобы точка A совпала с точкой C, а точка B с точкой D (рис. 99, *б*). Край этой поверхности представляет собой одну непрерывную линию, не пересекая которой можно попасть из любой внутренней точки листа в другую любую его точку. Если начать красить «одну сторону» листа Мёбиуса, допустим, в голубой цвет, то он весь окажется окрашенным в этот цвет, ибо вся эта поверхность имеет лишь одну сторону. В отличие от двусторонней поверхности лист Мёбиуса не распадется, если совершить разрез по средней его линии, параллельной краю, а превратится в замкнутую двустороннюю перекрученную поверхность. Если последнюю разрезать опять по средней линии, то она распадется на две, хотя и не связанные, но зацепленные и переплетенные между собой поверхности. Разрез листа Мёбиуса вдоль линии, параллельной средней линии, приводит к его распаду на более узкий лист Мёбиуса и на двустороннюю зацепленную с ним перекрученную поверхность.

Существуют и замкнутые односторонние поверхности. Такой, впрочем, является проективная плоскость, замыкаемая своей несобственной прямой, подобно тому как любую проективную прямую замыкает ее несобственная точка[1].

В знаменитой лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1854) и других работах Риман заложил также основу топологии многомерных поверхностей, определив их топологические инварианты, названные впоследствии А. Пуанкаре числами Бетти, по имени итальянского математика Энрико Бетти (1823—1892), продолжившего исследования Римана. Дальнейшее развитие топологии связано с именем А. Пуанкаре, автора «Анализа положения» (1895) с пятью дополнениями (1899—1904). К топологии Пуанкаре привели его исследования по качественной теории дифференциальных уравнений и по теории функций комплексных переменных. Именно в трудах Пуанкаре конца XIX и начала XX в. топология определилась как самостоятельная дисциплина со своими общими понятиями, задачами и методами. Он создал так называемую комбинаторную топологию, в которой алгебраическими методами исследуются топологические многогранники — фигуры, которые можно разбивать на ряд линейных симплексов. Пуанкаре ввел в топологию понятие гомеоморфизма и другие важнейшие понятия. Он первый усмотрел в теореме Эйлера[2], известной еще Декарту и впервые доказанной

---

[1] См. ч. II, § 21.
[2] См. ч. I, § 67.

в 1752 г. Эйлером, одну из важнейших теорем топологии. Исторически это была первая теорема топологии.

Соотношение

$$B - P + \Gamma = 2, \tag{1}$$

устанавливаемое теоремой Эйлера, имеет место для всех многогранников, поверхность которых гомеоморфна поверхности сферы и у которых каждая грань гомеоморфна кругу. Поскольку совокупность всех B вершин и P ребер многогранника можно рассматривать как некоторый граф (сетка ребер данного многогранника), а разрез многогранника по ребрам этого графа приводит к распадению поверхности многогранника на Γ компонент (граней), каждая из которых гомеоморфна кругу, то можно сформулировать и доказать теорему Эйлера в более общем виде: если на любой поверхности, гомеоморфной сфере, дан имеющий B вершин и P ребер граф, разрезающий поверхность на Γ компонент, гомеоморфных кругу, то имеет место соотношение (1). Число $B + \Gamma - P$ называют *эйлеровой характеристикой* разбиения поверхности. Для всех гомеоморфных сфере поверхностей эйлерова характеристика равна 2. Нетрудно установить, что для любой замкнутой поверхности рода p эйлерова характеристика равна $2 - 2p$, т. е.

$$B - P + \Gamma = 2 - 2p. \tag{2}$$

Это общая формула содержит как частный случай формулу (1), в которой речь идет о поверхностях нулевого рода ($p = 0$). Итак, эйлерова характеристика является топологическим инвариантом и зависит не от способа разбиения фигуры, а от самой фигуры.

Общий случай разбиения поверхности на многоугольники легко приводится к так называемой триангуляции, т. е. к разбиению на прямолинейные или криволинейные треугольники, которыми можно поэтому ограничиться. Сущность комбинаторного метода и заключается в том, что изучение некоторой поверхности сводится к изучению свойств, общих для всех триангуляций данной поверхности и выражающих таким образом свойства самой поверхности.

* *
*

Важным этапом в развитии топологии, как и всей современной геометрии, было создание многомерного пространства, возникновение которого связано с целесообразностью решения многих вопросов алгебры и анализа с помощью геометрии[1]. Начало геометрической алгебры восходит, как известно, к школе Пифагора. Некоторые попытки геометрической интерпретации степеней выше третьей встречаются уже в средние века, в частности у М. Штифеля, смутное представление о четырехмерном простран-

---

[1] См.: Курант Р. и Роббинс Г. Что такое математика. М., 1967, гл. IV.

стве — у Н. Орема. Однако лишь создание аналитической геометрии и появление функций более чем двух переменных способствовали возникновению и развитию *многомерной геометрии*. В своих работах по механике Ж. Л. Лагранж формально вводит наряду с тремя пространственными координатами и четвертую — время. Идея четырехмерного пространства встречается в «Барицентрическом исчислении» А. Мёбиуса. Говоря о невозможности совмещения двух зеркально конгруэнтных фигур, лежащих в одной и той же плоскости, без выхода в трехмерное пространство, Мёбиус по аналогии заключает, что для совмещения таких же двух пространственных фигур «необходимо произвести полуоборот в пространстве четырех измерений». Но так как такое пространство нельзя себе представить, то совмещение в этом случае невозможно. Эта идея Мёбиуса и вдохновила известного английского писателя Герберта Джорджа Уэллса на создание им научно-фантастического рассказа «История Платнера». Фактически ряд задач многомерной геометрии был поставлен и решен еще в 1834 г. К. Г. Якоби, однако лишь в 40-х годах прошлого столетия появляются первые работы, непосредственно посвященные n-мерной геометрии. В 1834 г. вышла в свет работа А. Кэли «Главы аналитической геометрии измерений», в 1844 г. — работа Г. Грассмана «Учение о линейной протяженности», а в 1846 г. — «Система геометрии пространства» Ю. Плюккера. К систематическому изложению многомерной геометрии Грассман, как и Кэли, пришел по пути формальных аналогий с двух- и трехмерной аналитической геометрией.

От аналитической многомерной геометрии математики пришли во второй половине XIX в. к чисто геометрическому, синтетическому ее изложению. Основоположником синтетической многомерной геометрии был швейцарский математик Людвиг Шлефли (1814—1895), написавший «Теорию многократной непрерывности» еще в 1852 г. Полностью эта работа появилась в печати в 1901 г., а важнейшие ее положения были опубликованы в 50-х годах прошлого века. Однако его геометрия в значительной степени была и аналитической.

Шлефли впервые разработал теорию многогранников n-мерного пространства и, в частности, доказал обобщенную теорему Л. Эйлера. О введении в 1854 г. Б. Риманом общего понятия многообразия (т. е. пространства) n измерений говорилось в предыдущем параграфе. Риман положил начало дифференциальной многомерной геометрии. Наряду с работами Бетти и Пуанкаре во второй половине прошлого века в области многомерной геометрии появился ряд работ Ф. Клейна, У. Стрингхема, Дж. Веронезе и др.

* * *

В 1911 г. голландский математик Л. Брауэр решил одну из первых и одновременно труднейших задач n-мерной топологии, доказав топологическую инвариантность числа измерений прост-

Л. С. Понтрягин

ранства, т. е. невозможность взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения друг на друга двух евклидовых пространств неодинакового числа измерений. Вот почему, несмотря на то что, как выяснилось из исследований Кантора, куб можно взаимно однозначно отобразить на квадрат, такое отображение не может быть взаимно непрерывным, ибо согласно теореме Брауэра имеющий три измерения куб не гомеоморфен квадрату с его двумя измерениями. Брауэр доказал также так называемую теорему о неподвижной точке, играющую большую роль в приложениях топологии: *каждое непрерывное отображение замкнутого шара в себе оставляет неподвижной по крайней мере одну его точку*. Работы Пуанкаре и Брауэра в комбинаторной топологии были продолжены и развиты рядом американских ученых. Один из них — Александер в 1915 г. доказал топологическую инвариантность чисел Бетти, а в 1923 — так называемую основную теорему двойственности для полиэдров.

Созданная Кантором теория множеств сделала возможным более глубокий и общий анализ понятий непрерывности и геометрической фигуры и привела к возникновению теоретико-множественной топологии, в развитие которой большой вклад внесли советские математики Павел Самуилович Урысон (1898—1924), построивший общую теорию размерности и прочитавший в МГУ в 1921/22 учебном году первый в СССР курс топологии, и академик Павел Сергеевич Александров, начавший свои топологические исследования вместе с Урысоном и ставший впоследствии главой советской топологической школы. П. С. Александровым была построена так называемая *гомологическая теория размерности*, создана *теория бикомпактных пространств* и получен ряд других важнейших результатов в области топологии. Применяя топологические методы, советские математики Лазарь Аронович Люстерник и Лев Генрихович Шнирельман полностью решили в 1929 г. поставленную еще в 1908 г. А. Пуанкаре и долго не поддававшуюся решению задачу о трех геодезических, доказав существование трех замкнутых геодезических линий без кратных точек на всех поверхностях рода нуль.

В комбинаторной топологии теорема двойственности Александера послужила отправным пунктом для одного из важнейших геометрических открытий XX в. — общего закона двойственности, сформулированного и доказанного академиком Львом Семеновичем Понтрягиным в 1932 г. Этот закон устанавливает самые

глубокие топологические связи между данным замкнутым множеством n-мерного евклидова пространства и дополнительной к этому множеству частью пространства. Понтрягину и его ученикам, Владимиру Григорьевичу Болтянскому, Михаилу Михайловичу Постникову и др., принадлежит ряд важнейших результатов по топологии многообразий. В 1934—1935 гг. академик Андрей Николаевич Колмогоров и независимо от него Александер ввели в комбинаторную топологию метод верхних гомологий, позволивший ученым, в том числе П. С. Александрову и К. А. Ситникову, развить дальше общую теорию топологической двойственности.

Мы уже знаем, что развитие геометрии в XIX в. привело к значительному расширению и обобщению предмета геометрии и понятия пространства. Вместо единственной, обычной евклидовой геометрии появились, с одной стороны, *неевклидовы* геометрии Лобачевского, а затем и Римана, с другой же — проективная, аффинная, конформная и другие геометрии. Стало возможным говорить о проективном, аффинном, n-мерном, римановом и других пространствах. Так был постепенно проложен путь к формированию в XX в. понятия абстрактного пространства, под которым в современной математике понимают любое множество однородных объектов с пространственно-подобными отношениями. Самые общие геометрические абстракции — понятия метрического и топологического пространства — возникли в связи с развитием топологии и созданием теории множеств. Одна из первых работ, посвященных изучению абстрактных пространств, появилась в 1906 г. Она называется «О некоторых положениях функционального исчисления» и была написана французским математиком Морисом Фреше. Последний дал первое определение понятия общего метрического пространства, сохранившееся по существу до настоящего времени. Под метрическим пространством понимают множество любых объектов, называемых точками, для которых определено понятие расстояния ρ между произвольными двумя точками A и B, т. е. число $\rho \geqslant 0$, удовлетворяющее следующим трем аксиомам:

1) $\rho(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$, т. е. когда обе точки идентичны (аксиома тождества);

2) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ (аксиома симметрии) и

3) $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geqslant \rho(A, C)$ (аксиома треугольника).

Для иллюстрации укажем, например, на то, что метрическим пространством является множество всех непрерывных функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ на отрезке $[a, b]$, где расстояние ρ между двумя функциями $f(x)$ и $g(x)$ можно определить как максимум $|f(x) - g(x)|$ при описании x-ом указанного отрезка. Легко проверить, что здесь имеют место все вышеуказанные три аксиомы. В своей упомянутой выше работе Фреше рассматривал различные *функциональные* пространства, т. е. такие метрические пространства, точками

которых являются функции, расстояние между которыми определяется различными способами. Функциональные пространства послужили одним из первых примеров бесконечномерных пространств. Идея рассмотрения множества функций того или иного типа как некоторое «пространство» является одной из основных идей *функционального анализа*, одного из важнейших разделов современной математики, возникшего на пороге XX в., объединяющего и обобщающего идеи классического анализа, теории множеств, линейной алгебры и многомерной геометрии. Важнейшее из пространств, применяемых в функциональном анализе, — это бесконечномерное евклидово пространство, называемое гильбертовым[1].

В «Основаниях теории множеств» (1914) немецкий математик Феликс Хаусдорф (1868—1942) впервые дал общее определение абстрактного топологического пространства, за которым последовали определения, предложенные польским математиком Казимиром Куратовским, советским математиком П. С. Александровым и др. Понятие расстояния — основного инварианта метрических пространств — не нужно при изучении топологических свойств абстрактных пространств, главным из которых является свойство непрерывности, т. е. бесконечной близости, прикосновения тел (множеств). Под *топологическим пространством* понимают множество любых объектов, называемых «точками», в котором для каждого подмножества заданы его точки прикосновения[2], при этом должны удовлетворяться некоторые условия, формулируемые в виде аксиом, например: всякая точка рассматриваемого множества является его точкой прикосновения, точка прикосновения суммы двух множеств является точкой прикосновения хотя бы одного из этих множеств и т. д.

В настоящее время абстрактная топология проникает во всякую математическую область, где речь идет о непрерывности, и выходит за пределы собственно геометрии, однако в ее основе лежит обобщение геометрических свойств и наглядных геометрических представлений.

Возникшая из практических нужд измерения площадей земельных участков и определения объемов сосудов и амбаров, геометрия прошла длинный и сложный путь, пока превратилась в древней Греции в дедуктивную науку, изложенную в «Началах» Евклида. Не менее сложным было дальнейшее ее развитие. Применение к геометрии алгебраического и аналитического методов в трудах Ферма, Декарта, Монжа, Клеро, Эйлера, Лагранжа и др. привело в XVII—XVIII вв. к созданию и развитию аналитической и дифференциальной геометрии. Внутренняя геометрия поверхностей,

---

[1] См.: Люстерник Л. А., Соболев С. Л. Элементы функционального анализа, М.; Л., 1950.

[2] Отношение прикосновения одной точки к множеству точек и прикосновение двух множеств определяется строго математически.

развитая Гауссом, заложила основы дальнейшего расширения предмета нашей науки, осуществленного Б. Риманом. Переломным пунктом в истории геометрии было открытие геометрии Лобачевского, за которым последовало построение и развитие новых различных систем геометрических пространств, в том числе и n-мерного пространства в трудах Римана, Грассмана, Кэли, Клейна и др. Благодаря трудам Пуанкаре, Гильберта и других ученых XX в., сыгравших существенную роль в развитии топологии и аксиоматического метода, геометрические методы проникли во многие области современной математики и естествознания. В связи с формированием понятия абстрактного пространства предметом геометрии в широком смысле в настоящее время являются любые формы и отношения, которые в абстрактном плане сходны с пространственными, любые пространства и фигуры в них.

Глава VII.

ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ[1]

Идите, идите вперед, уверенность придет к вам позже.

Даламбер

§ 24. АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — неотрицательные числа. Доказать, что имеет место неравенство Буняковского — Коши — Шварца:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \times \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2},$$

или короче: $\sum_1^n a_i \cdot b_i \leqslant \sqrt{\sum_1^a a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_1^n b_i^2}$.

Знак равенства имеет место лишь тогда, когда нулю равны все разности $a_pb_k - a_kb_p$ при $p \neq k$, в частности при пропорциональности соответствующих чисел:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots \frac{a_n}{b_n}.$$

2. *Неравенства П. Л. Чебышева.* В 1886 г. П. Л. Чебышев установил: пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ положительны.

---

[1] Часть задач позаимствована из кн: Попов Г. Н. Сборник задач по элементарной математике. М.; Л., 1938.

Если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, то

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \leqslant \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n}. \quad (1)$$

Если же $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, но $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, то

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \geqslant \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n}. \quad (2)$$

В обоих случаях равенство имеет место только тогда, когда все числа a_1, a_2, ..., a_n равны между собой и вместе с тем все числа b_1, b_2, ..., b_n равны друг другу[1].

Эти неравенства читаются так: если два ряда положительных величин содержат одинаковое число членов и в обоих рядах члены не убывают (или в обоих не возрастают), то произведение средних арифметических не превосходит среднего арифметического произведений. Если же в одном ряду члены не убывают, а в другом не возрастают, то имеет место противоположное неравенство.

Проверьте неравенства Чебышева для:

A) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 7;\ b_1 = 4,\ b_2 = 3,\ b_3 = 2;$

B) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 7;\ b_1 = 2,\ b_2 = 3,\ b_3 = 4.$

3. *Задача ал-Караджи* (XI в.). Решить уравнение

$$3x + \sqrt{5x^2} = 1.$$

4. *Задача Фибоначчи.* Решить уравнение

$$3x + 4\sqrt{x^2 + 3x} = 20.$$

5. *Задача Н. Шюке* (XV в.). Решить уравнение

$$\sqrt{12x - x^2} + 1 = \sqrt{36 - x^2}.$$

6. *Задача М. Штифеля.* Проверить равенство

$$\sqrt{16} + \sqrt[3]{8} = \sqrt{\sqrt[3]{4096}} + \sqrt{\sqrt[3]{64}}.$$

7. *Задача Эйлера.* Решить уравнение

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

8. Крупнейший физик X—XI вв., каирский ученый Ибн ал-Хайсам впервые пытался определить высоту атмосферы с помощью тригонометрических расчетов, полагая среди другого, что сумерки продолжаются до тех пор, пока солнце не опустится ниже горизонта на 19°. О постановке им задачи можно судить по рисунку

---

[1] Доказательство можно найти в кн.: Невяжский Г. Л. Неравенства. М., 1947.

100, где N представляет высокое облако, отражающее на исходе сумерек луч SN к наблюдателю M. Этот луч образует с горизонтом угол $\alpha = 19°$. Найти высоту атмосферы $h = ON - r$, где r —радиус Земли.

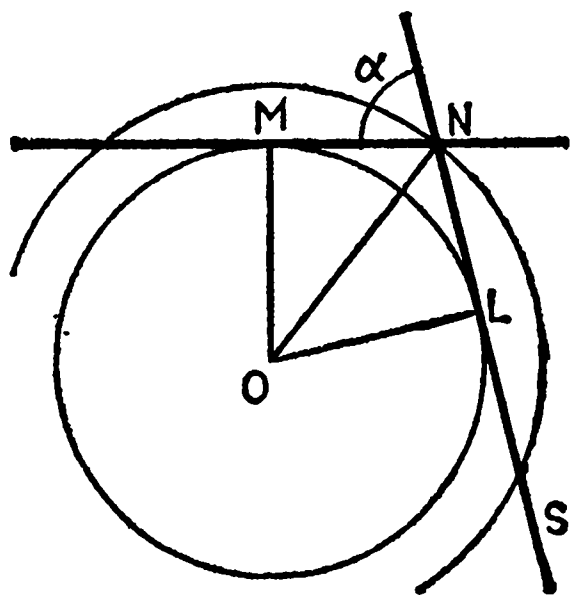


Рис. 100.

9. Известный датский астроном XVI в. Тихо Браге, ценные результаты наблюдений которого дали возможность Кеплеру вывести свои знаменитые законы движения планет, уделял много времени тригонометрическим вычислениям. Вот две выведенные им формулы, связывающие стороны и углы произвольного треугольника:

$$\operatorname{tg} C = \frac{a \sin B}{a - \cos B}, \qquad \operatorname{tg}(B + C) = \frac{a \sin B}{a \cos (B - C)}.$$

Докажите!

10. *Четыре формулы Ф. Виета.* Доказать:

а) $\cos mx = 2 \cos x \cos (m - 1) x - \cos (m - 2) x$,

б) $\sin mx = 2 \cos x \sin (m - 1) x - \sin (m - 2) x$,

в) $\sin mx = 2 \sin x \cos (m - 1) x + \sin (m - 2) x$,

г) $\cos mx = 2 \sin x \sin (m - 1) x + \cos (m - 2) x$.

11. *Несколько формул Эйлера.* Доказать:

а) $\sin (30° + z) = \cos z - \sin (30° - z)$,

б) $\cos (30° + z) = \cos (30° - z) - \sin z$,

в) $\operatorname{tg} (30° + 2b) = \frac{1}{2} [\operatorname{ctg} (30° - b) - \operatorname{tg} (30° - b)]$,

г) $(a^4 + b^4) = \left(a^2 - 2ab \cdot \cos \frac{\pi}{4} + b^2\right) \cdot \left(a^2 - 2ab \cdot \cos \frac{3}{4} \pi + b^2\right)$.

12. *Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.* Некто продал коня за 156 руб. Покупатель, заплатив деньги, раздумал, считая цену слишком высокой, и возвращает коня. Тогда торговец изменил условия покупки. Он предложил покупателю купить у него только подковные гвозди (по 6 гвоздей на каждой подковке, всего 24 гвоздя) и после уплаты за них получить в придачу и лошадь. За гвозди владелец лошади установил такую цену: за первый — полушку, т. е. $\frac{1}{4}$ копейки, за второй — $\frac{1}{2}$ копейки, за третий — 1 копейку и т. д., т. е. плата за каждый следующий гвоздь была в 2 раза боль-

ше, чем за предыдущий. Покупатель согласился на эти условия, считая, что ему придется уплатить за лошадь не более 10 руб. В задаче спрашивается, на сколько покупатель просчитался.

13. *Задача Ферма.* Показать, что если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии a_1, a_2, a_3, ..., то

$$\frac{S}{S-a_1} = \frac{a_1}{a_2}.$$

14. *Из учебника XIX в.* Сколько раз пробьют часы в продолжение 12 часов, если они отбивают и получасы?

15. *Задача О. Шлёмильха.* Решить кубическое уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, если корни его составляют: 1) арифметическую прогрессию; 2) геометрическую прогрессию.

16. *Из задач Эйлера.* Определить рациональные значения x и y в уравнении $x^y = y^x$.

17. *Из «Алгебры» Ж. Л. Бертрана* (1822—1900). Чему равно основание системы логарифмов, в которой 6 есть логарифм 729?

18. *Из «Введения в анализ бесконечных», т. 1, Л. Эйлера.* Доказать, что логарифмы двух чисел в любой системе сохраняют одно и то же отношение.

19. Пусть к концу каждого века число людей удваивается; требуется найти годовой прирост.

20. Пусть число людей увеличивается ежегодно на $\frac{1}{100}$ свою часть; спрашивается, через сколько лет число людей удесятерится.

21. Найти величину двадцать пятого члена ряда 2^1, 2^2, 2^4, 2^8, ...

22. *Задача Гольдбаха.* Доказать, что при a и b целых и положительных сумма всех дробей вида $\frac{1}{(a+1)^{b+1}}$ имеет пределом единицу.

Из *«Дифференциального исчисления» Л. Эйлера.*

23. Вычислить производную функции $e^x x^n$.

24. Найти случаи, в которых значение трехчлена $x^2 + 3x + 2$ становится максимальным или минимальным.

Из *«Интегрального исчисления», т.* I, *Л. Эйлера.*

25. Вычислить: $\int dx \arcsin x$, $\int x dx \arcsin x$.

26. Предложено однородное дифференциальное уравнение

$$x dx + y dy = x dy - y dx.$$

Найти его интеграл.

27. *Из задач Лейбница.* 1) Показать, что $m^5 - m$ делится на 5. 2) Показать, что $m^7 - m$ делится на 7.

28. *Задача Муавра.* Показать, что всякое возвратное уравнение нечетной степени имеет корень $x = -1$ и при почленном делении обеих частей уравнения на $x + 1$ дает опять-таки возвратное уравнение степени на единицу меньше.

29. *Задача Ж. Озанама.* Семеро друзей собрались к обеду, но между ними возник спор, кому с кем садиться. Чтобы прекратить пререкания, кто-то из присутствующих предложил всем сесть за стол как придется, но с условием, чтобы в следующие дни обедать вместе, причем каждый раз садиться по разному до тех пор, пока не будут испробованы все возможные комбинации. Спрашивается, сколько раз придется им обедать вместе для этой цели?

§ 25. ГЕОМЕТРИЯ

1. В 1827 г. А. Мёбиус впервые установил в своей книге «Барицентрическое исчисление», что всякий вектор $\overline{A_1A_2}$, заданный своим началом A_1 и концом A_2, равен (в современных обозначениях) разности $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$ соответствующих радиус-векторов. Применим этот результат для решения следующей з а д а ч и: *зная радиус-векторы* $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ точек A_1 и A_2, найти радиус-вектор $\bar{r}_m$ *точки* M, *делящей* отрезок A_1A_2 *в данном отношении* λ.

2. Д е к а р т о в л и с т. В письме, написанном в январе 1638 г. своему другу, математику Марэну Мерсену (1588—1648), Декарт рассматривает кривую BDN (рис. 101), такую, «что если в любом месте ее контура взять точку B и опустить[1] перпендикуляр BC, то кубы двух линий BC и CD вместе равны параллелепипеду на тех же двух линиях BC и CD и на данной линии P». Эта кривая была названа парижским математиком Ж. Робервалем у з л о м л е н т ы, другими — л е п е с т к о м ж а с м и н а, так как первоначально считали абсциссы и ординаты положительными в обе стороны от осей и неправильно рисовали кривую как четырехлистник с одинаковыми петлями во всех квадрантах. Лишь в 1692 г. Х. Гюйгенс и И. Бернулли определили истинную форму кривой, получившей после этого название д е к а р т о в а л и с т а.

Напишите уравнение кривой в прямоугольных декартовых координатах, исходя из определения Декарта, исследуйте ее вид по полученному уравнению и начертите кривую.

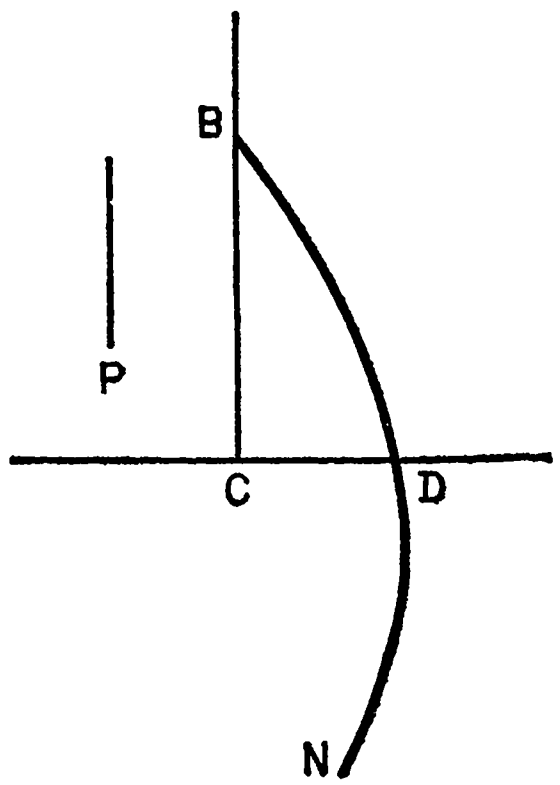


Рис. 101.

И з в т о р о г о т о м а «В в е д е н и я в а н а л и з» Л. Э й л е р а

3. Определить, какую линию представляет собой уравнение

$$y^2 = ay + xy - ax.$$

4. Представляет ли непрерывную линию четвертого порядка уравнение

$$y^4 - xy^3 - a^2x^2 - ay^3 + ax^2y + a^2xy = 0?$$

5. Галилей и Торричелли, Роберваль, Декарт и Ферма, Гюйгенс и братья Якоб

[1] Подразумевается на CD.

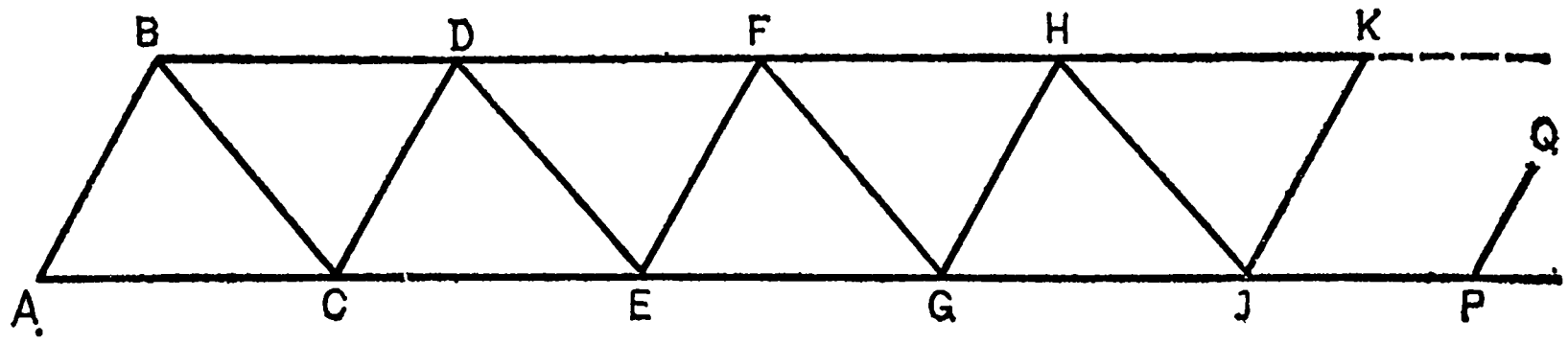


Рис. 102.

и Иоганн Бернулли — все они занимались кривой, названной Галилеем циклоидой (от греческого «кюклоэйдос» — кругообразный), которую можно определить как линию, описанную произвольной точкой окружности радиуса r, катящейся без скольжения по горизонтальной прямой.

Найти параметрические уравнения циклоиды и исследовать ее по полученным уравнениям.

6. В «Основаниях геометрии» Д. Гильберта среди теорем, вытекающих из аксиом принадлежности, фигурирует и следующая: две плоскости либо не имеют ни одной общей точки, либо имеют общую прямую и никаких других (не лежащих на этой прямой) общих точек[1]. Докажите!

7. Теорема Коммандино (1509—1575). Четыре прямые, соединяющие каждую вершину тетраэдра с точкой пересечения медианы противоположной грани, пересекаются в одной точке, делящей каждый из четырех отрезков в отношении 3 : 4 (считая от вершины). Докажите!

8. Задача Штейнера. В своей статье «Некоторые законы о делении плоскости и пространства», опубликованной в первом выпуске журнала Крелле[2], содержится следующая задача: *найти наибольшее число частей (областей), на которое можно разложить пространство с помощью n плоскостей.*

Предварительно решается такая задача: *найти наибольшее число частей, на которое можно разбить плоскость n прямыми.*

Решите задачу для плоскости, затем для пространства.

9. Задача Монжа. Через противоположные ребра тетраэдра проводятся параллельные плоскости. Найти отношение объема тетраэдра к объему образованного (описанного) около него параллелепипеда.

К главе VI

10. Первая основная теорема Лежандра. В одном из изданий (1800) «Элементов геометрии» Лежандр до-

---

[1] См.: Гильберт Д. Основания геометрии. М.; Л., 1948, с. 58.

[2] Этот «Журнал чистой и прикладной математики», основанный в Берлине в 1826 г. немецким математиком и инженером А. Крелле (1780—1855).

казал следующую теорему: *сумма трех внутренних углов треугольника не может быть больше двух прямых углов.*

Доказательство. Пусть, если возможно, ABC будет треугольник (рис. 102), в котором сумма трех углов больше двух прямых.

На продолжении прямой AC возьмем $CE = AC$; построим $\angle ECD = \angle CAB$ и сторону $CD = AB$; соединим DE и BD. Треугольник CDE будет равен треугольнику ABC, так как они имеют одинаковый угол, содержащийся между соответственно равными сторонами: следовательно, $\angle CED = \angle ACB$, $\angle CDE = \angle ABC$ и третья сторона ED равна третьей стороне BC. Так как ACE есть прямая линия, то сумма углов $\angle ACB$, $\angle BCD$, $\angle DCE$ равна двум прямым. Однако мы предположили, что сумма углов $\triangle ABC$ больше двух прямых; поэтому

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB > \angle ACB + \angle BCD + \angle ECD;$$

отнимая от обеих частей общее слагаемое $\angle ACB$ и равные слагаемые $\angle CAB = \angle ECD$, получим: $\angle ABC > \angle BCD$, а так как стороны AB, BC $\triangle ABC$ соответственно равны сторонам CD, CB $\triangle BCD$, то отсюда следует, что третья сторона AC больше третьей стороны BD.

Представим себе теперь, что прямая AC неограниченно продолжена и последовательно построены равные и подобным же образом расположенные $\triangle ABC$, $\triangle CDE$, $\triangle EFG$, $\triangle GHI$ и т. д. Если соединим соседние вершины прямыми BD, DF, FH, HK и т. д., то вместе с тем образуется ряд промежуточных треугольников $\triangle BCD$, $\triangle DEF$, $\triangle FGH$ и т. д., которые все будут равны между собой, так как все они будут иметь по равному углу, содержащемуся между соответственно равными сторонами. Следовательно, $BD = DF = FH = HK = \ldots$; имея в виду это и принимая во внимание, что $AC > BD$, положим разность $AC - BD = d$. Ясно, что в таком случае $2d$ будет разность между прямой ACE, равной $2AC$, и прямой или ломаной линией BDF, равной $2BD$; таким образом, $AE - BF = 2d$. Таким же образом найдем, что $AG - BH = 3d$, $AI - BK = 4d$ и т. д.

Но как бы мала ни была разность d, если мы ее повторим достаточное число раз, она превзойдет любую наперед заданную величину. Можно, следовательно, предположить, что ряд треугольников продолжен настолько далеко, что разность $AP - BQ$ будет больше $2AB$; мы будем, таким образом, иметь: $AP > BQ + 2AB$. С другой стороны, прямая AP короче ломаной $ABQP$, так что $AP < AB + BQ + QP$, или $AP < BQ + 2AB$. Таким образом, гипотеза, из которой мы исходили, привела нас к противоречию. Следовательно, сумма углов треугольника не может превосходить двух прямых.

В этом безупречном доказательстве используется аксиома Евдокса — Архимеда.

11. Вторая теорема Лежандра. *В каждом тре-*

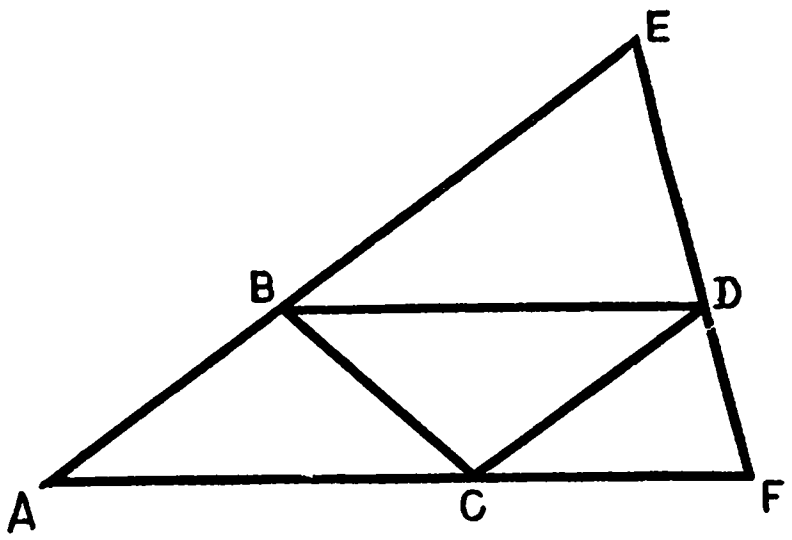


Рис. 103.

угольнике сумма трех внутренних углов равна двум прямым.

Доказательство. «Доказав, что сумма трех углов не может превышать двух прямых, остается обнаружить, что она не может быть меньше двух прямых.

Пусть ABC будет данный треугольник (рис. 103), и пусть, если это возможно, сумма его углов равна $2P - z$, где P означает прямой угол, а z — какую-нибудь величину, на которую сумма углов, согласно предположению, меньше двух прямых углов.

Пусть $\angle A$ будет наименьший из углов $\triangle ABC$. При противоположной стороне BC построим $\angle BCD = \angle ABC$ и $\angle CBD = \angle ACB$; $\triangle BCD$ и $\triangle ABC$ будут равны, так как они имеют общую сторону BC, к которой прилежат соответственно равные углы.

Через точку D проведем какую угодно прямую EF, но таким образом, чтобы она встречала продолжения сторон угла A в точках E и F. Так как сумма углов в каждом из треугольников ABC и BCD составляет $2P - z$, а в каждом из треугольников EBD и DCF она не может превзойти $2P$, то сумма всех углов четырех треугольников ABC, BCD, EBD, DCF не превосходит $4P - 2Z + 4P$, т. е. $8P - 2Z$.

Если из этой суммы вычтем сумму углов при точках B, C, D, которая составляет $6P$ (так как сумма углов, образовавшаяся при каждой из точек, есть $2P$), то остаток будет равен сумме углов $\triangle AEF$, которая, таким образом, не превзойдет $8P - 2Z - 6P$, т. е. $2P - 2Z$.

Итак, в то время как сумма углов $\triangle ABC$ меньше двух прямых на Z, эта сумма в $\triangle AEF$ меньше двух прямых на $2Z$. При посредстве $\triangle AEF$ можно, таким образом, построить третий треугольник, сумма углов которого будет меньше $2P - 4Z$; затем мы построим четвертый треугольник, сумма углов которого отличается от $2P$ больше чем на $8Z$; это можно продолжать неограниченно.

Однако, сколь бы мало ни было Z по сравнению с прямым углом, последовательность Z, $2Z$, $4Z$, $8Z$ и т. д., члены которой постоянно удваиваются, рано или поздно приведет к члену, равному $2P$ или большему $2P$. Мы придем тогда к треугольнику, к сумме

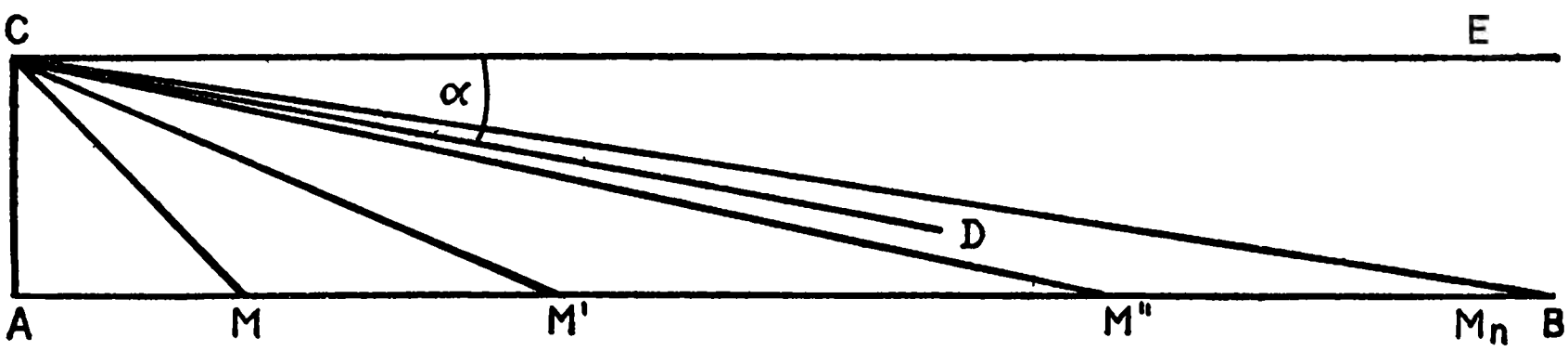


Рис. 104.

углов которого нужно будет прибавить $2P$ или больше $2P$, чтобы в результате все-таки получить $2P$. Этот вывод, очевидно, абсурдный. Следовательно, гипотеза, от которой мы исходили, не может иметь места; значит, невозможно, чтобы сумма углов $\triangle ABC$ была меньше двух прямых. А так как сумма углов треугольника в силу предыдущего предложения не может превышать также $2P$, то она равна $2P$».

Это доказательство логически порочно, так как в нем предполагается, что через точку D, лежащую внутри угла, всегда можно провести прямую EF, пересекающую обе стороны угла. Однако допущение это эквивалентно V постулату.

12. Доказательство Лежандра V постулата[1]. Допустим, что сумма углов во всяком треугольнике равна $2d$; докажем, что две прямые, расположенные в одной плоскости, одна из которых перпендикулярна к секущей, а другая образует с нею острый угол, встречаются со стороны этого острого угла.

Положим, что прямая AB перпендикулярна к секущей AC, прямая же CD, расположенная в плоскости ACB, образует с AC острый угол ACD (рис. 104) Через точку C проведем в той же плоскости перпендикуляр CE к секущей AC и $\angle DCE$ обозначим через α. Если на AB отложим отрезок $AM = AC$, то при сделанном допущении относительно суммы углов треугольника $\angle ACM$ равнобедренного треугольника ACM равен $\frac{1}{2}d$; $\angle MCE$ также равен $\frac{1}{2}d$. Если в ту же сторону отложим отрезок $MM' = CM$, то в силу того же допущения $\angle MCM'$ равен $\frac{1}{4}d$ и то же значение имеет $\angle M'CE$. Повторяя то же построение, будем получать точки M, M', M'', M''', ..., причем углы MCE, $M'CE$, $M''CE$ ... составят убывающую геометрическую прогрессию (со знаменателем $\frac{1}{2}$); при достаточно большом n $\angle M_nCE$ станет меньше α; значит, луч CM_n пройдет между лучами CD и CE, т. е. луч CD войдет внутрь угла и треугольника ACM_n, он неизбежно пересечет сторону AM_n, т. е. пересечет перпендикуляр AB.

13. *Трактриса* (от латинского *traho* — тащу, влеку)[2], открытая Гюйгенсом, была определена как плоская кривая, описываемая материальной точкой M, влекомой нитью постоянной длины a, другой конец N которой (см. рис. 69) скользит по прямой AB, называемой осью трактрисы. Из определения вытекает, что *длина отрезка MN касательной, проведенной в любой этой кривой, от точки касания* до встречи с осью *имеет постоянную длину* a.

Составить и исследовать уравнение трактрисы Показать, что

---

[1] См.: Каган В. Ф. Основания геометрии. М., 1949, ч. I, с. 131.
[2] Отсюда и слово «трактор» — тягач.

получаемая от вращения трактрисы вокруг своей оси поверхность — псевдосфера — имеет постоянную отрицательную кривизну.

14. В своем «Первоначальном наброске» Дезарг нередко пользуется так называемой теоремой Менелая: *если стороны (или продолжения сторон) BC, CA, AB треугольника ABC пересечены произвольной прямой соответственно в точках A_1, B_1 и C_1, то имеет место равенство*

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1. \qquad (1)$$

Докажите!

Справка. Теорема содержится в 3-й книге «Сферики» древнегреческого ученого Менелая (I в.) и была им доказана для сферического треугольника. На протяжении многих веков ее называли «теоремой о секущих». Аналогичная теорема сферической геометрии играла большую роль в создании сферической тригонометрии. Теорема Менелая является частным случаем более общей теоремы Карно: *если каждая сторона треугольника ABC пересекается плоской алгебраической кривой $y = f(x)$ порядка m в m точках, то будет равно 1 произведение трех отношений вида:*

$$\frac{A_iB}{A_iC}, \quad \frac{B_iC}{B_iA}, \quad \frac{C_iA}{C_iB} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, m),$$

где A_i, B_i, C_i — точки пересечения кривой $y = f(x)$ соответственно с прямыми BC, CA и AB.

15. Доказать теорему, обратную теореме Менелая.

16. Доказать на основании теоремы Менелая теорему о полном четырехугольнике.

17. Доказать с помощью теоремы Менелая теорему Дезарга.

18. Вывести из теоремы Менелая теорему Паскаля.

19. Вывести из теоремы Дезарга теорему о том, что три меридианы треугольника пересекаются в одной точке.

20. Одним из важнейших предложений элементарной геометрии, носящих проективный характер, является теорема Чевы: *всякие три прямые KA, KB, KC (называемые чевианами), исходящие из одной точки K и проходящие через вершины треугольника ABC, встречают противоположные вершинам стороны BC, CA, AB в трех точках A_1, B_1, C_1 так, что имеет место соотношение*

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Докажите!

Справка. Джованни Чева (1648—1734) — итальянский инженер-гидравлик и экономист. Носящая его имя теорема содержится в опубликованной им в 1678 г. работе «О прямых линиях».

21. Доказать теорему, обратную предыдущей.

22. Доказать с помощью теоремы Чевы теоремы о конкурентности медиан, биссектрис и высот треугольника.

Из геометрии треугольника

23. Теорема Симсона: *Ортогональные проекции произвольной точки окружности, описанной около треугольника, на его стороны лежат на одной прямой* («прямой Симсона»).

Докажите!

Справка. Теорема долгое время приписывалась шотландскому математику Роберту Симсону (1687—1768); на самом деле ее впервые доказал в 1799 г. английский математик Вильям Уоллес (1768—1843). Теорема была обобщена Л. Карно, рассматривавшим вместо ортогональных любые косые проекции, параллельные данному направлению.

24. Теорема Стюарта: *Пусть D — любая точка, лежащая на основании BC треугольника ABC, $BD = m$, $CD = n$, $AD = d$; тогда имеет место соотношение*

$$d^2a = b^2m + c^2n - amn,$$

где a, b, c — длины сторон треугольника.

Докажите!

Справка. Теорема была сообщена шотландскому математику М. Стюарту (1717—1785) его учителем Р. Симсоном, однако ученик сумел опубликовать ее в 1746 г., на три года раньше своего учителя.

25. Применить теорему Стюарта к нахождению медиан и биссектрис треугольника.

Некоторые знаменитые задачи элементарной геометрии

26. Задача Аполлония: *Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей.*

Справка. Задача была поставлена и решена Аполлонием в не дошедшем до нас его сочинении «О касаниях». Впервые полностью решил задачу Ф. Виет (рис. 105). Последовали решения Декарта, Ньютона, Эйлера, Понселе и др. П. Ферма поставил и решил аналогичную стереометрическую задачу: построить сферу, касающуюся трех данных сфер.

27. Одна из важнейших геодезических задач первой половины XVII в., решением которой занимались и многие математики XVIII—XIX вв., носит название задачи Потено: *Найти точку, из которой отрезки AB и BC, образованные данными тремя точками A, B, C, видны под данными углами r, соответственно S.*

Справка. Задача долгое время приписывалась сотруднику Лагира, французскому инженеру Л. Потено (ум. в 1732 г), опубликовавшему ее в 1692 г. в «Мемуарах Парижской Академии наук». Позже, однако, было обнаружено, что еще в 1671 г. задача и ее решение были опубликованы английским ученым моряком Джоном Коллинзом (1625—1683) в английском журнале «*Philoso-*

Sint dati duo circuli, vnus ABCD alter EFGH, & præterea datum I punctum. Oportet per I punctum circulum deſcribere quem circuli ABCD, EFGH contingant. Circulorum ABCD EFGH iungantur centra K, L & in KL inueniatur ex antecedente, quod primo loco præmiſſum eſt, lemmate, M punctum, à quo, cum ducentur rectæ lineæ ſecantes circulos ABCD EFGH, ſimilia ſint ſegmenta. Ipſa verò kL ſecet ex diametro circulum ABCD in ſignis A, D, circulum verò EFGH in ſignis E, H, & ita ſecetur MI in N, vt quod ſit ſub MI MN æquale ſit ei quod ſit ſub MH MA, & per I, N puncta deſcribatur circulus qui à circulo ABCD tangatur. Id enim iam docuit Problema octauum. Et ſit contactus in B, & connectatur BM ſecans circulum ABCD in B, C, circulum verò EFGH in F, G. Quod ſit igitur ſub MG MB æquale eſt ei quod ſit ſub MH MA, id eſt ex conſtructione ei quod ſit ſub MN MI ex antecedente, quod ſecundo

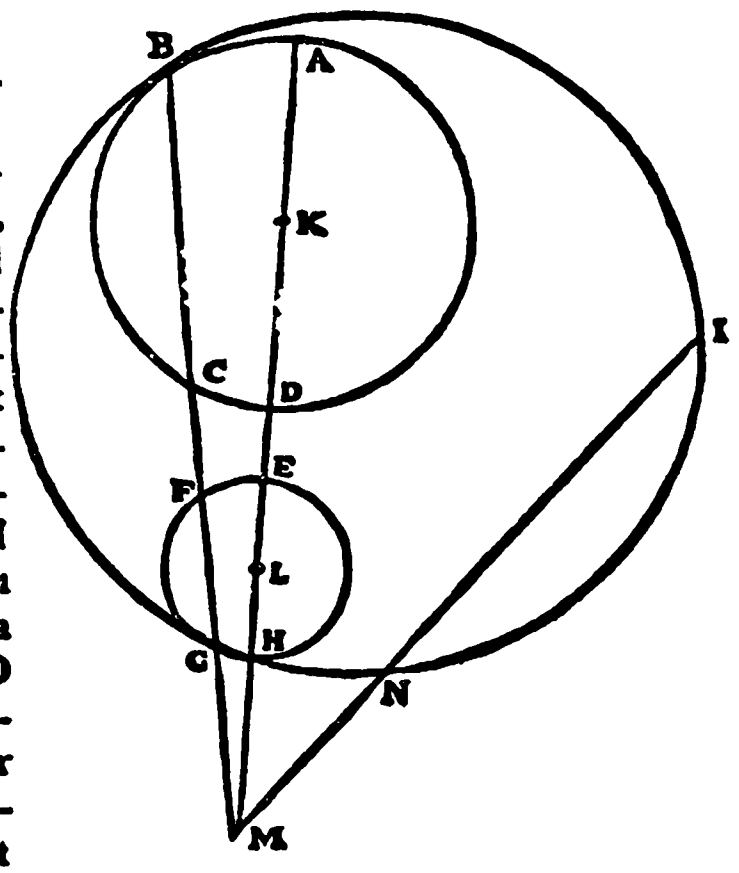


Рис. 105 Из «Галльского Аполлония» Виета (Париж, 1600).

phical transactions». Наконец, было установлено, что впервые эта задача появилась в печати еще раньше, в 1621 г., в одном из трудов профессора Лейденского университета Виллеборда Снеля.

28. Одной из популярных задач элементарной геометрии XIX в. была з а д а ч а М а л ь ф а т т и: *в данном треугольнике ABC построить три окружности так, чтобы каждая из них касалась двух других и двух сторон данного треугольника.*

С п р а в к а. Задача была предложена и алгебраически решена в 1803 г. итальянским геометром Джованни Мальфатти (1731—1807). Для частного случая равнобедренного треугольника задача была решена еще в 1687 г. Якобом Бернулли в его работе «Решение тройной задачи...». К этой же задаче пришел и Жергон, опубликовавший ее в своих «Анналах» в 1810—1811 гг. С помощью тригонометрии ее решил в 1819 г. Д. Лемус (1780—1863). В 1826 г. Я. Штейнер опубликовал первое полное конструктивное решение задачи.

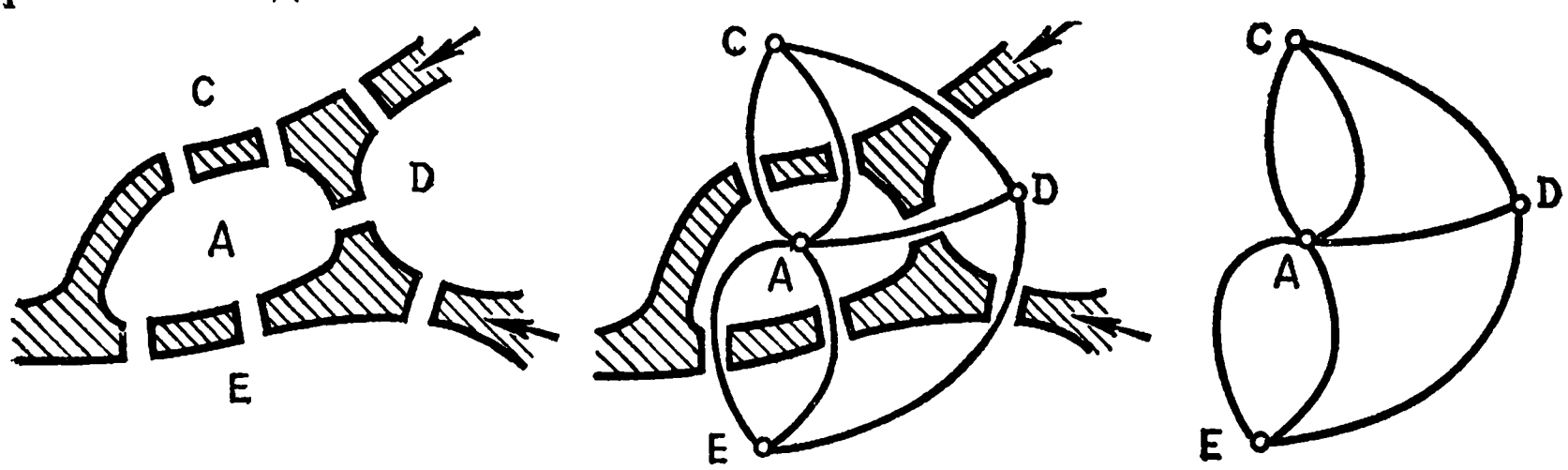


Рис. 106.

29. Задача Эйлера о семи мостах (рис. 106, 107). На реке Преголя, где стоит город Калининград (б. Кенигсберг), есть остров (A), соединенный двумя мостами с левым берегом (B), двумя — с правым берегом (C) и одним — с территорией (D) между двумя рукавами верхнего течения, непосредственно соединенной в свою очередь с берегами двумя мостами. Вопрос, которым занимался и который решил Эйлер, следующий: возможно ли пройти последовательно по всем семи мостам, не вступая ни на один из них дважды?

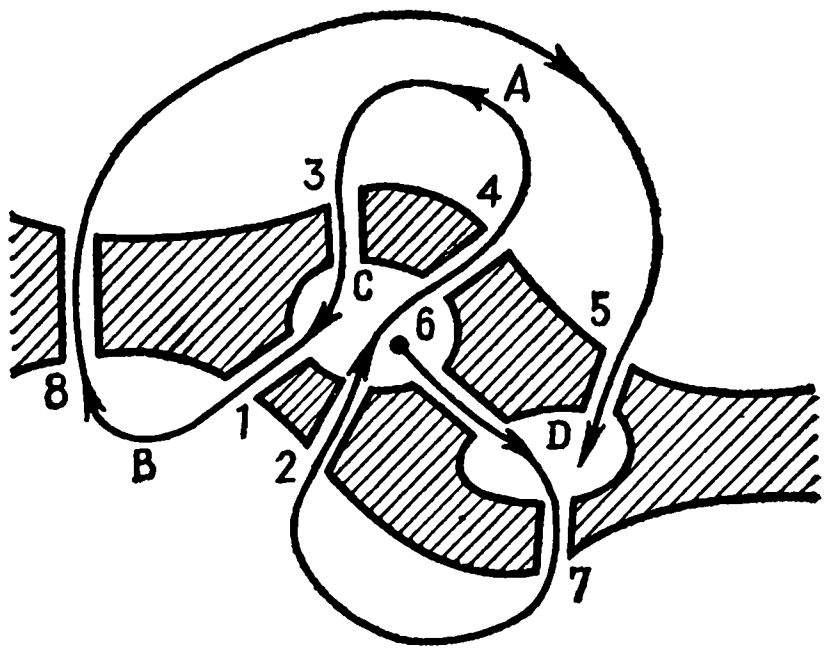


Рис. 107.

Задача сводится к вычерчиванию с одного росчерка линии, состоящей из семи дуг так, что в каждой из четырех вершин A, B, C, D сходятся 3 или 5, т. е. нечетное число, дуг (см. § 23). Вот почему на поставленный вопрос следует дать отрицательный ответ.

§ 26. ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Алгебра и начала анализа

1. Указание. Доказательство методом математической индукции. Для $n=1$ неравенство верно:

$$a_1 b_1 \leqslant \sqrt{a_1^2 b_1^2}\,.$$

Пусть неравенство верно для $n-1$, т. е.

$$\sum_1^{n-1} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_1^{n-1} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_1^{n-1} b_i^2}\,,$$

или коротко: $M^2 \leqslant N \cdot Q$. Докажем, что неравенство верно и для n, т. е.

$$(M + a_n b_n)^2 \leqslant (N + a_n^2)(Q + b_n^2)\,,$$

или

$$M^2 + 2Ma_n b_n + a_n^2 b_n^2 \leqslant NQ + Nb_n^2 + Qa_n^2 + a_n^2 b_n^2.$$

Так как $M^2 \leqslant NQ$, задача сводится к доказательству неравенства

$$2Ma_n b_n \leqslant Nb_n^2 + Qa_n^2.$$

Усиливая последнее неравенство, пишем:

$$(Nb_n^2 + Qa_n^2 - 2\sqrt{NQ}\; a_n b_n) \geqslant 0,$$

или

$$(a_n\sqrt{N} - b_n\sqrt{Q})^2 \geqslant 0.$$

Мы пришли к фундаментальному неравенству о неотрицательности квадрата любого числа.

8. Угол LNO равен углу MNO по закону отражения. Поэтому в прямоугольном ΔOMN угол $MNO = 80°30'$ и высота атмосферы

$$h = \frac{r}{\sin 80° 30'} - r.$$

Результат, основанный на тогдашнем измерении градуса широты, составляет около 10—12 км. Он далек от истины, так как Ибн ал-Хайсам не учитывал преломления луча света и считал атмосферу заканчивающейся на уровне облаков.

12. Эта задача напоминает известную задачу о вознаграждении изобретателя шахматной игры. Решение ее состоит в вычислении разности между суммой членов геометрической прогрессии, первый член которой равен $\frac{1}{4}$, знаменатель равен 2, а последний член есть 2^{21}, и числом 156.

13. Указание. Исходя из известной формулы

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \tag{1}$$

получим:

$$S - a_1 = \frac{a_1}{1-q} - a_1 = \frac{a_1 - a_1 + a_1 q}{1-q} = \frac{a_2}{1-q}. \tag{2}$$

Деля (1) на (2), получим искомый результат.

14. Ответ 90. Указание. Задача сводится к нахождению суммы арифметической прогрессии, в которой $a = 2$, $d = 1$, $n = 12$.

15. Известно, что между корнями x_1, x_2, x_3 и коэффициентами a, b, c уравнения 3-й степени $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ существует зависимость:

$$a = -(x_1 + x_2 + x_3). \tag{1}$$

$$b = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3, \tag{2}$$

$$c = -x_1x_2x_3. \tag{3}$$

1) Если корни составляют арифметическую прогрессию, то имеем:

$$x_1 - x_2 = x_2 - x_3, \tag{4}$$

тогда из (1) и (4):

$$x_2 = -\frac{a}{3},$$

из (1) и (3):

$$x_1 + x_3 = -\frac{2}{3}a,$$

$$x_1x_3 = \frac{3c}{a},$$

откуда

$$x_1 = -\frac{a}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^3 - 27c}{a}},$$

$$x_3 = -\frac{a}{3} - \frac{1}{3}\frac{a^3 - 27c}{a}.$$

Найденные корни подставим в (2), получим условие, которому должны удовлетворять коэффициенты, для того чтобы кубическое уравнение имело корни, представляющие арифметическую прогрессию. Это условие будет:

$$\frac{2a^3 + 27c}{9a} = b.$$

2) Если корни уравнения представляют геометрическую прогрессию, то

$$x_1 : x_2 = x_2 : x_3. \tag{5}$$

Из (5) и (3) следует:

$$x_2 = \sqrt[3]{-c}, \quad x_1 x_3 = \sqrt[3]{c^2}, \tag{6}$$

из (1):

$$x_1 + x_3 = -a + \sqrt[3]{c}, \tag{7}$$

из (6) и (7) получим:

$$x_1 = -\frac{a - \sqrt[3]{c}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a - \sqrt[3]{c}}{2}\right)^2 - \sqrt[3]{c^2}},$$

$$x_3 = -\frac{a - \sqrt[3]{c}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a - \sqrt[3]{c}}{2}\right)^2 - \sqrt[3]{c^2}}.$$

Подставляя x_1, x_2, x_3 в (2), находим условие:

$$b = a\sqrt[3]{c},$$

при котором корни кубического уравнения образуют геометрическую прогрессию.

16. Пусть $y = ax$, т. е. $(ax)^x = x^{ax}$, или $ax = x^a$; $a = x^{a-1}$, откуда $x = a^{\frac{1}{a-1}}$, тогда $y = a^{\frac{a}{a-1}}$; если положить $\frac{1}{a-1} = n$, получим $a = \frac{n+1}{n}$, следовательно,

$$x = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \text{ и } y = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}.$$

17. 3.

18. $(a + b \lg x)\lg x = \lg c$; пусть $\lg x = y$, тогда $by^2 + ay - \lg c = 0$. Найдя y, легко найдем x.

19. Если положим, что число людей возрастает ежегодно на $\frac{1}{x}$ свою часть и притом вначале число людей было равно n, то по истечении 100 лет

это число будет равно $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{100} \cdot n$; это должно быть равно $2n$ и тогда

$$\frac{1+x}{x} = 2^{\frac{1}{100}}$$

и

$$\lg \frac{1+x}{x} = \frac{1}{100} \qquad \lg 2 = 0{,}0030103,$$

отсюда

$$\frac{1+x}{x} = \frac{10069555}{10000000},$$

поэтому

$$x = \frac{10000000}{69555} = \text{приблизительно } 144.$$

Итак, достаточно ежегодного прироста числа людей на $\frac{1}{144}$ часть.

20. Положим, что это наступит через x лет, причем число людей вначале было равно n; стало быть, по истечении x лет оно будет равно $\left(\frac{101}{100}\right)^x \cdot n$, а так как оно должно равняться $10n$, то

$$\left(\frac{101}{100}\right)^x = 10,$$

поэтому

$$x \lg \frac{101}{100} = \lg 10$$

и

$$x = \frac{\lg 10}{\lg 101 - \lg 100}.$$

Таким образом, получим:

$$x = \frac{10000000}{43214} = 231 \text{ приблизительно.}$$

Итак, через 231 год число людей, если ежегодное приращение составляет только $\frac{1}{100}$ часть, станет больше в 10 раз; отсюда через 462 года оно станет в 100 раз, а через 693 года в 1000 раз больше.

21. *Решение Эйлера.* Показатели составляют геометрическую прогрессию, причем показатель 25-го члена будет:

$$2^{24} = 16\,777\,216,$$

так что сам искомый член будет равен

$$2^{16777216};$$

следовательно, логарифм его равен

$$16\,777\,216 \cdot \lg 2.$$

Но так как

$$\lg 2 = 0{,}30102999566398119 52,$$

то логарифм искомого числа будет равен

$$5\,050\,445{,}25973367;$$

из характеристики видно, что искомое число при выражении обычным способом будет состоять из

$$5\,050\,446$$

знаков. Мантисса же 259 733 675 932, будучи найдена в таблицах логарифмов, даст начальные знаки искомого числа; они будут 181 858. Хотя написать это число никак невозможно, однако можно утверждать, что оно состоит из 5 050 446 знаков и что 6 начальных цифр будут 181 858, правее которых следуют 5 050 440 знаков; некоторые из них могут, сверх того, быть определены из больших таблиц логарифмов; именно 11 начальных знаков будут 18 185 852 986.

22. Будем давать b различные значения, начиная с единицы. Тогда искомая сумма представится в виде

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+1)^3} + \frac{1}{(a+1)^4} + \cdots .$$

Давая a всевозможные значения, начиная с единицы, мы представим эту сумму так:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots .$$

Таким образом, весь ряд состоит из бесчисленного множества убывающих геометрических прогрессий. Сумма членов первой прогрессии равна $\frac{1}{1 \cdot 2}$, второй $\frac{1}{2 \cdot 3}$ и т. д. Следовательно, ряд напишется так:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots ,$$

но $\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ и т. д.

Следовательно, ряд перепишется:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots .$$

Сумма первых n его членов равна $1 - \frac{1}{n+1}$, что в пределе при $n \to \infty$ дает единицу.

23. $e^x(nx^{n-1} + x^n)$.

24. Ответ Эйлера. Положим $x^2 \pm 3x + 2 = y$; тогда

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3, \quad \frac{d^2y}{2dx^2} = 1$$

Следовательно, $2x + 3 = 0$, получим: $x = -\frac{3}{2}$. Дает ли этот случай максимум или минимум, мы должны узнать из значения $\frac{2y}{2dx^2} - 1$, так как оно положительно при любом x, то мы имеем минимум. Если положить $x = -\frac{3}{2}$, то получаем: $y = -\frac{1}{4}$, если же количеству x мы будем приписывать какие-либо другие значения, то будем всегда получать значения y большие, чем $-\frac{1}{4}$. Так же и из природы самой формулы $x^2 + 3x + 2$ ясно, что она должна иметь минимальное значение; действительно, так как она возрастает до бесконечности как при $x = \infty$, так и при $x = -\infty$, то необходимо, чтобы некоторое значение количества x давало бы количеству y минимальное из всех значений.

25. $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} - 1$, $\frac{1}{2} x^2 \arcsin x + \frac{1}{4} x \cdot \sqrt{1 - x^2 - \frac{1}{4} \arcsin x}$.

26. Здесь $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$. Положив $y = ux$, имеем:

$$udx + xdu = \frac{1 + u}{1 - u} dx, \text{ или } xdu = \frac{1 + u^2}{1 - u} dx.$$

Отсюда получается:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du - udu}{1 + u^2}$$

и после интегрирования

$$\lg x = \operatorname{arctg} u - \lg \sqrt{1 + u^2} + C,$$

или

$$\lg x^2 + y^2 = C + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

27. 1) $m^5 - m = m(m^4 - 1) = m(m^2 - 1) \pm (m^2 + 1)$. Пусть $m = 2k$, т. е. четно. Тогда $m^2 \pm 1 = 4k^2 \pm 1$; если m не делится на 5, то возможны формы этого числа $5n \pm 1$ и $5n \pm 2$; m^2 дает $25n^2 \pm 10n + 1$ и $25n^2 \pm 20n + 4$; т. е. $m^2 =$ кр. $5 + 1$ или кр. $5 - 1$, следовательно, либо $m^2 - 1$, либо $m^2 + 1$ делится на 5.

Аналогично убедимся в этом при m нечетном. Для доказательства можно применить и метод математической индукции. Как?

2) $m^7 - m = m(m^6 - 1) = m(m^3 - 1)(m^3 + 1)$. Пусть $m = 2k$, т. е. четное. Для m, если оно не делится на 7, возможны формы $7n \pm 1$, $7n \pm 2$, $7n \pm 3$. Но m^3 во всех этих случаях будет равно кр. 7 ± 1, следовательно, либо $m^3 - 1$, либо $m^3 + 1$ делится на 7.

28. Возьмем уравнение 5-й степени: $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$.

Ясно, что при $x = -1$ имеем:

$$-a + b - c + c - b + a = 0,$$

следовательно, $x = -1$ есть корень уравнения. Если левую часть уравнения разделить на $x + 1$, то получим:

$$ax^4 + (b - a)x^3 + (c + a - b)x^2 + (b - a)x + a.$$

29. Задача сводится как будто к определению числа перестановок из семи элементов:

$$P_7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

Так решил и Озанам, но он ошибся. Озанам рассматривает все места как совершенно различные. И это было бы правильно, если бы семь человек сидели, скажем, на одной длинной скамейке с одной стороны стола, предполагая последний прямоугольной формы. Но если они усаживаются кругом стола (хотя бы прямоугольного, а не круглого), т. е. так, что последний из усевшихся оказывается соседом первого, то относительно положения обедающих не изменится, если по данному знаку каждый из них пересядет на соседний стул вправо. Так как гости могут подобным образом пересаживаться шесть раз вправо, то Озанам, считая их за различные, нашел семь прямолинейных перемещений, тогда как в действительности здесь будет только одно круговое. Следовательно, число обедов должно сократиться до 720. Но если принять во внимание, что вместо пересаживания вправо все могли бы пересесть влево, то число различных перемещений уменьшится вдвое, т. е. будет равно 360. Это и есть правильное решение задачи. Озанам высчитал, что гости должны обедать вместе 14 лет. Оказывается, что в действительности им для этой цели пришлось бы собираться ежедневно только в течение одного года.

Геометрия

1. Р е ш е н и е.

$$\overline{A_1M} = \bar{r}_м - \bar{r}_1, \quad \overline{MA_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_м,$$

$$\bar{r}_м - \bar{r}_1 = \lambda(\bar{r}_2 - \bar{r}_м), \quad r_м = \frac{\bar{r}_1 + \lambda\bar{r}_2}{1 + \lambda}.$$

В частном случае, когда точка M делит отрезок A_1A_2 пополам ($\lambda = 1$), имеем:

$$r_м = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2}.$$

2. У к а з а н и е. Под «линиями» CD и BC мы теперь понимаем текущие координаты x и y любой точки B кривой. P есть некоторая постоянная, которую мы обозначим, например, через $3a$. Тогда относительно прямоугольной декартовой системы координат уравнение кривой имеет следующий вид:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение симметрично относительно координат x и y, а это означает, что кривая симметрична относительно биссектрисы $y = x$. Так как в начале координат обе частные производные $3(x^2 - ay)$ и $3(y^2 - ax)$ от левой части уравнения (1) равны нулю, то нет определенной касательной в точке O, являющейся особой точкой. Как мы знаем из дифференциального исчисления,

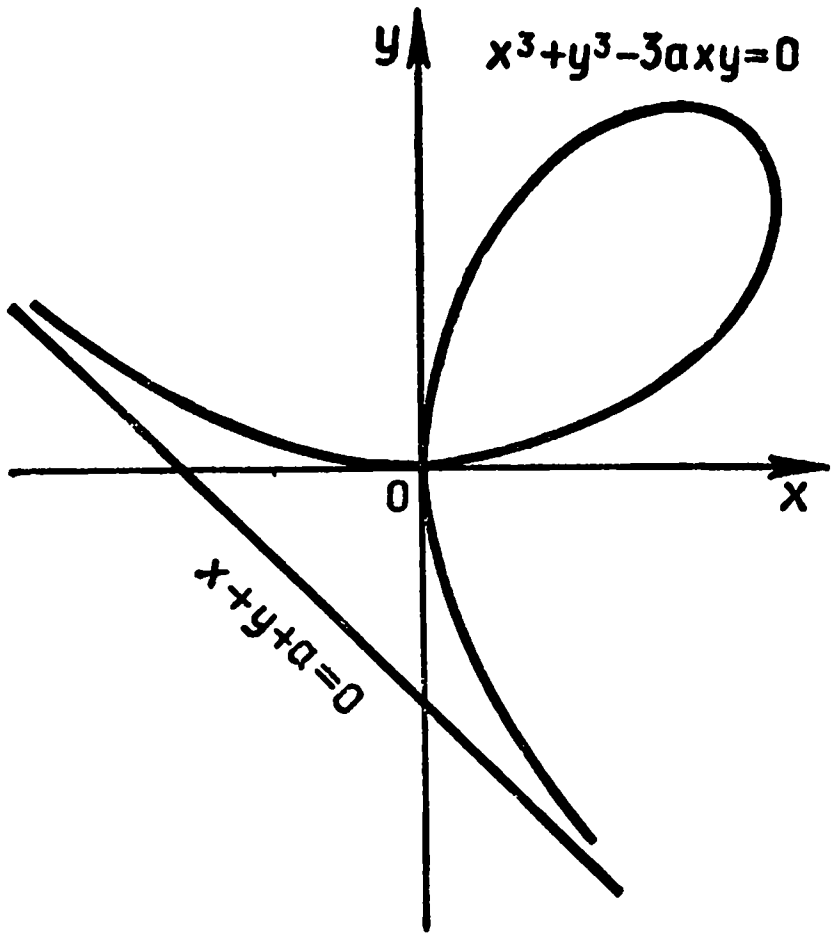


Рис. 108.

эта точка является у з л о м. Касательными к кривой в данном случае являются прямые $x = 0$, $y = 0$, т. е. оси координат (рис. 108).

Пересечем кривую прямой $y = kx + b$. Решая систему, поставленную этим уравнением с уравнением кривой, получим одно уравнение 3-й степени относительно x, в котором коэффициентами при x^3 и x^2 являются $1 + k^3$ и $3k^2b - 3ak$. Как известно, приравнивая нулю эти коэффициенты, получим угловой коэффициент $k = -1$ и значение $b = -a$ для асимптоты кривой. Уравнение асимптоты следующее:

$$x + y + a = 0,$$

откуда следует, что во II и IV квадрантах кривая уходит своими ветвями в бесконечность. Теперь можно начертить кривую.

3. Две прямые: $y - x = 0$, $y - a = 0$.

4. Нет. Оно представляет две прямые $y - x = 0$, $y - a = 0$ и одну кривую второго порядка $y^2 - ax = 0$.

5. Примем за ось Ox прямую, по которой катится окружность (рис. 109), а за начало координат O — ту точку горизонтальной прямой, с которой совпадает в некоторый момент движущаяся точка окружности, описывающая циклоиду. За параметр t примем угол, образуемый вертикальным радиусом DN с радиусом DM, проведенным в точке M циклоиды. Для вычисления координат x, y движущейся точки M следует учесть, что длина дуги MN равна длине прямолинейного отрезка ON, ибо после того, как окружность повернулась на угол t, точка O окружности заняла положение M. Таким образом, имеем:

$$x = OF = ON - FN = \overset{\frown}{MN} - MG = rt - r\sin t = r(t - \sin t);$$

$$y = MF = DN - DG = r - r\cos t = r(1 - \cos t).$$

Итак, параметрические уравнения циклоиды можно записать в виде

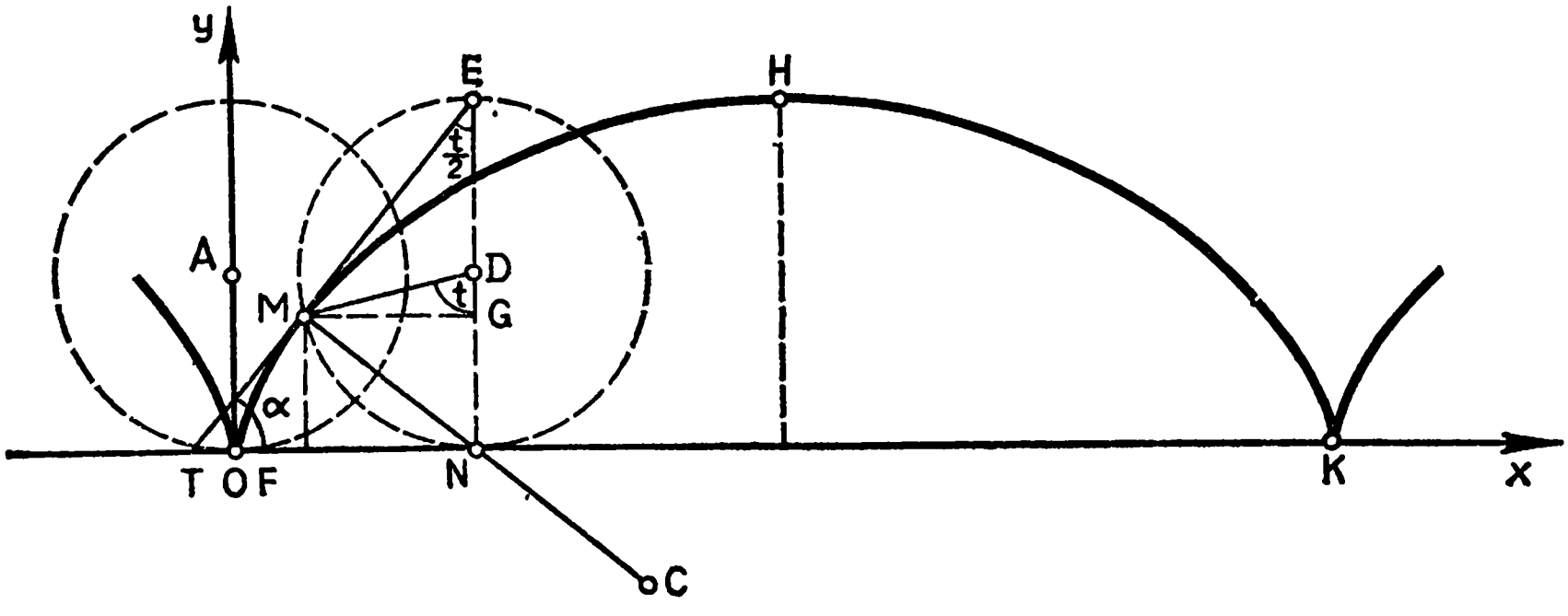


Рис. 109.

$$\left.\begin{aligned} x &= r(t - \sin t), \\ y &= r(1 - \cos t). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

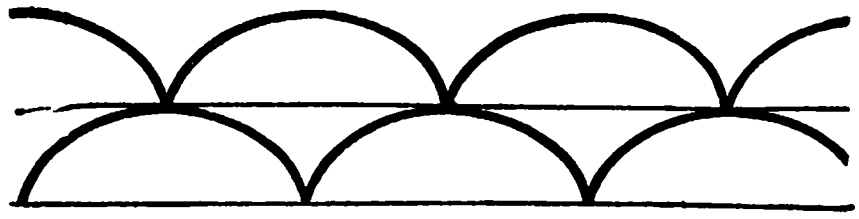


Рис. 110.

Циклоида — трансцендентная кривая, в чем можно убедиться, исключая из уравнений (1) параметр t. Уравнение циклоиды примет тогда вид:

$$x = r \arccos \frac{r - y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$

При изменении параметра t от 2 до 2π движущаяся точка M окружности опишет арку — дугу OHK. Кривая в целом, получаемая при изменении параметра t от $-\infty$ до $+\infty$, состоит из бесчисленного множества таких арок (рис. 110). Расстояние OK равно $2\pi r$, ордината H (наибольшая ордината) равна диаметру $2r$ катящейся окружности. Точки циклоиды, имеющие абсциссы $0 \pm 2K\pi r$, являются особыми (точками возврата). Для нахождения углового коэффициента касательной в произвольной точке циклоиды имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{r \sin t}{r - r \cos t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} =$$

$$= \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right).$$

Обозначив через T точку пересечения с осью X прямой EM и заметив, что вписанный $\angle TEN$ равен $\frac{t}{2}$, заключаем, что угол, образованный прямой ET, проходящей через точку M кривой, равен $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$, т. е. ET есть касательная к циклоиде в точке M, а MN ее нормаль в этой точке. Таким образом, мы нашли следующее важнейшее свойство рассматриваемой кривой: *касательная к циклоиде в любой ее точке проходит через высшую точку производящей образующей циклоиду окружности, а нормаль — через низшую.* Длину S одной арки циклоиды можно выразить интегралом

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{2r^2(1 - \cos t)}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2r \sin \frac{t}{2}\, dt = 8r.$$

Площадь, ограниченная одной аркой циклоиды и ее основанием (отрезком OK), выразится интегралом

$$\int_0^{2\pi r} y\, dx = \int_0^{2\pi r} r^2(1 - \cos t)^2\, dt = 3\pi r^2.$$

То, что площадь круга в три раза больше площади образующего циклоиду круга, установил впервые Галилей, пользовавшийся, конечно, не формулами интегрального исчисления, которых тогда еще не было, а двумя одинаково

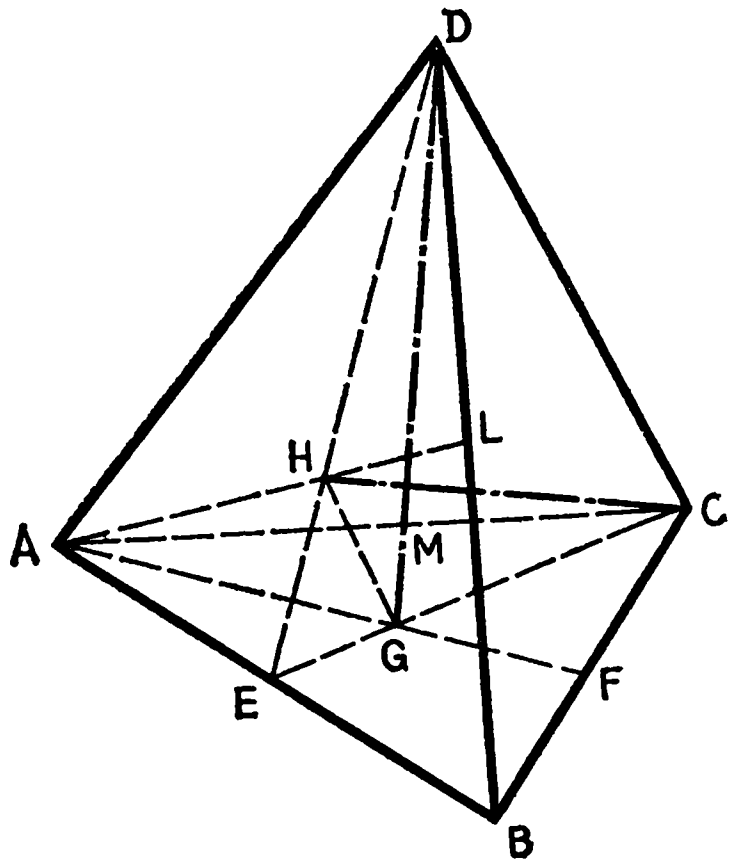


Рис. 111.

тонкими металлическими пластинками, одна из которых имела вид диска производящего круга, другая — вид арки соответствующей циклоиды. Вот почему теорему о площади циклоиды иногда называют «теоремой Галилея». Два ученика Галилея, итальянские математики Эванджелиста Торричелли (1608—1647), известный открытием атмосферного давления и изобретением ртутного барометра, и Винченцо Вивиани (1622—1703), пришли к результату Галилея, пользуясь «методом неделимых». Несколько другим способом определил площадь циклоиды Г. Роберваль, занимавшийся, как и Б. Паскаль, определением объема тела, получаемого от вращения арки циклоиды вокруг своего основания. Теорему Галилея доказали независимо друг от друга Ферма и Декарт, которые определили способ построения касательной к циклоиде. В 1673 г. Гюйгенс открыл свойство изохронности циклоидального маятника, а в конце XVII в. Лейбниц, И. Бернулли, И. Ньютон и Г. Лопиталь установили, что циклоида — это брахистохрона[1].

6. Доказательство. Пусть две различные плоскости α и β имеют одну общую точку A, т. е.

$$A \in \alpha, \quad A \in \beta.$$

Тогда существует еще одна общая точка B, т. е.

$$\exists B, \ B \in \alpha, \ B \in \beta. \text{ (аксиома } I_7)$$

$$\text{далее } \exists a \equiv AB, \text{ (аксиома } I_{1,2})$$

$$a \in \alpha, \ a \in \beta. \text{ (аксиома } I_6)$$

Если бы существовала точка C, такая, что

$$C \in \alpha, \quad C \in \beta, \quad C \bar{\in} a,$$

то в силу аксиом $I_{4,5}$ α и β не были бы различными. Теорема доказана.

7. Решение. Пусть G — точка пересечения медиан AF и CE треугольника ABC; H — точка пересечения медиан DE и AL треугольника ABD (рис. 111). Прямые DG и CH, лежащие в плоскости DEC, пересекутся в точке M. Так как прямые CD и GH параллельны, имеем:

$$\frac{GM}{MD} = \frac{HM}{MC} = \frac{GH}{CD} = \frac{EG}{CE} = \frac{1}{3}.$$

Итак, точка M делит отрезок DG, как и отрезок CH, в отношении 3 : 4. Аналогично получаем, что и прямые, исходящие из вершин A и B, должны пройти через точку M и т. д. Точка M является центром тяжести тетраэдра.

---

[1] Подробнее о циклоиде см.: Берман Г. Н. Циклоида. 3-е изд. М., 1980.

8. Решение Штейнера. Число частей плоскости, очевидно, будет наибольшим, когда никакие две из n прямых не будут параллельными и никогда через одну точку не пройдет более двух прямых. Полагая, что эти два условия выполнены, обозначим через $\overline{n}$ искомое число частей плоскости.

Итак, пусть n прямых делят плоскость на $\overline{n}$ частей. Начертим в этой плоскости еще одну прямую. Последняя пересекает первые n прямых в n точках и, следовательно, проходит через $n+1$ части (из имеющихся $\overline{n}$) и разбивает каждые из них на две части так, что общее число частей увеличивается на $n+1$, т. е. имеет место равенство

$$\overline{n+1} = \overline{n} + (n+1). \tag{1}$$

Напишем n равенств для $n = 0, 1, 2, \ldots, n-1$:

$$\overline{1} = 1 + 1,$$

$$\overline{2} = \overline{1} + 2,$$

$$\overline{3} = \overline{2} + 3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\overline{n} = \overline{n-1} + n.$$

Почленно складывая, получаем:

$$\overline{n} = 1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n),$$

или

$$\overline{n} = 1 + \frac{n+1}{2}\, n = \frac{1}{2}\,(n^2 + n + 2). \tag{2}$$

Таким образом, наибольшее число частей, на которые n прямые могут разбить плоскость, равно $\frac{1}{2}\,(n^2 + n + 2)$.

Проверьте на чертеже для $n = 1, 2, 3, 4$.

Переходим к решению задачи в пространстве.

Здесь также число частей, на которые n плоскостей могут разделить пространство, будет наибольшим; если никогда более трех из них не пройдет через одну точку и никогда не будут параллельны прямые пересечения более двух плоскостей. При этих условиях пусть число частей пространства, полученных от разбиения его n плоскостями, равно $\widetilde{n}$. Добавим еще одну плоскость. Эта плоскость пересекает предыдущие n плоскостей по n прямым, из которых через произвольную точку проходит не более двух и среди которых нет параллельных прямых. Сама добавленная плоскость разделяется этими n прямыми в $\overline{n}$ частей, каждая из которых разбивает пробиваемую им часть пространства на две части. Итак, благодаря добавленной плоскости добавляется $\overline{n}$ пространственных частей, т. е.

$$\widetilde{n+1} = \widetilde{n} + \overline{n}. \tag{3}$$

Поступая аналогично предыдущему случаю, имеем:

$$\widetilde{1} = 1 \qquad + 1,$$

$$\widetilde{2} = \widetilde{1} \qquad + \overline{1},$$

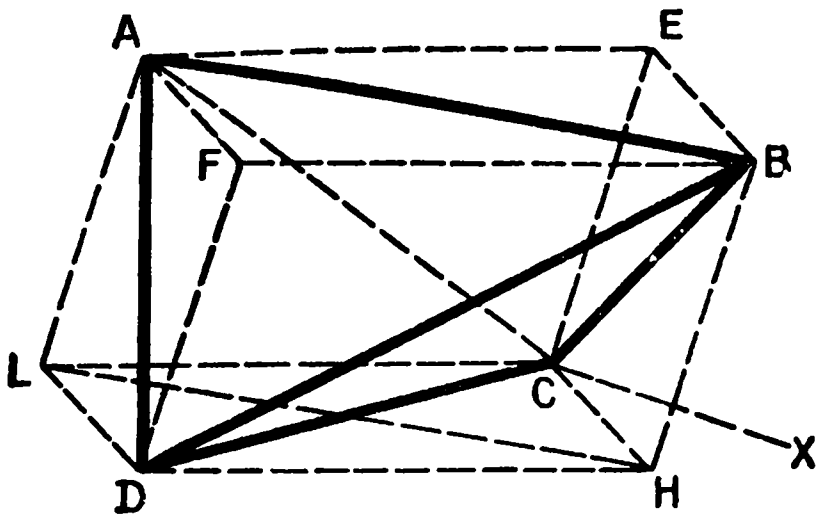


Рис. 112.

$$\tilde{3} = \tilde{2} \quad + \bar{2},$$

$$\tilde{n} = \overbrace{n-1} \quad + \overline{n-1}.$$

Почленное сложение дает:

$$\tilde{n} = 2 + \bar{1} + \bar{2} + \bar{3} + \cdots + \overline{n-1}. \qquad (4)$$

Учитывая (3), имеем:

$$\tilde{n} = n + 1 + \frac{1}{2}[1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)n].$$

Так как $\nu(\nu+1) = \nu^2 + \nu$, получим:

$$\tilde{n} = n + 1 + \frac{1}{2}\{[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] + [1 + 2 + \cdots + (n-1)]\};$$

$$\tilde{n} = n + 1 + \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}. \qquad (5)$$

Это и есть искомое число.

9. Указание. Через противоположные ребра AB и DC, AD и BC, AC и BD можно провести по одной паре параллельных плоскостей (рис. 112). Действительно, проводя, например, $CX \parallel AB$, получим плоскость DCX, параллельную прямой AB. Через AB проводим затем плоскость, параллельную плоскости DCX. Так строим параллелепипед, описанный около тетраэдра. Объем тетраэдра V можно получить как разность между объемом параллелепипеда и суммой объемов четырех равновеликих пирамид $BDCH$, $ACDL$, $CAEB$ и $DABF$, каждая из которых составляет $\frac{1}{6}$ параллелепипеда. Если обозначить через V_1 объем пирамиды, то получим:

$$V = V_1 - \frac{4}{6}V_1 = \frac{1}{3}V_1, \quad \frac{V}{V_1} = \frac{1}{3}.$$

13. Решение. Длина касательной MN к кривой $y = f(x)$ выражается, как известно, формулой[1]

$$MN = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Если ось трактрисы примем за ось X, а перпендикулярную к ней прямую DC за ось Y, то дифференциальное уравнение трактрисы можно записать в виде

---

[1] См., например: Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М., 1956, с. 18.

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=a. \tag{1}$$

Обозначив через φ угол BNM, образуемый осью X с касательной NM, будем иметь:

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\varphi, \quad \frac{dx}{dy}=\operatorname{ctg}\varphi. \tag{2}$$

Из (1) теперь получим:

$$y=a\sin\varphi.$$

Значит,

$$dy=a\cos\varphi d\varphi. \tag{3}$$

Из (2) имеем:

$$dx=dy\operatorname{ctg}\varphi,$$

или

$$dx=a\cos\varphi d\varphi\operatorname{ctg}\varphi=a\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}d\varphi=a\left(\frac{1}{\sin\varphi}-\sin\varphi\right)d\varphi.$$

Почленное интегрирование дает:

$$x=a\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}+a\cos\varphi+C; \tag{4}$$

(4) и (3) являются параметрическими уравнениями трактрисы. Исключая параметр φ, получаем уравнение кривой в виде

$$x=a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}+\sqrt{a^2-y^2}. \tag{5}$$

Приступая к исследованию прямой по ее параметрическим уравнениям, отметим, во-первых, что $0<\varphi<\pi$; значит, $y>0$. Далее, если φ стремится к 0, $\frac{\pi}{2}$, π, то x будет стремиться соответственно к $-\infty$, 0, $+\infty$, а ордината y к 0, a, 0. Значит, ось X является асимптотой трактрисы. Кривая расположена симметрично относительно оси Y. Точка $C(0, a)$, соответствующая значению параметра $\varphi=\frac{\pi}{2}$, будет точкой возврата. Длина S дуги трактрисы, отсчитываемая от точки C, выражается интегралом

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}d\varphi=-a\ln\sin\varphi. \tag{6}$$

Площадь, ограниченная трактрисой и ее осью, выразится интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y\,dx = \frac{1}{2}\,\pi a^2. \tag{7}$$

Кривизна $\frac{1}{R_1}$ выразится известной формулой

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\frac{d^2y}{d\varphi^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{a\operatorname{ctg}\varphi}. \tag{8}$$

При вращении трактрисы вокруг своей оси (оси X) получается псевдосфера — поверхность, состоящая из двух пол (рис. 68), отделенных *ребром возврата*. Одна из кривизн $\frac{1}{R_1}$, главных сечений в точке M поверхности, выразится формулой (8), так как одно из главных сечений совпадает с меридианом поверхности вращения. Радиус кривизны второго нормального сечения равен по теореме Менье (см. § 21) длине нормали в точке M, т. е. $R_2 = a\operatorname{tg}\varphi$. Учитывая, что направление нормали и радиуса кривизны противоположно, получим, наконец, для полной кривизны K псевдосферы:

$$K = -\frac{1}{a\operatorname{ctg}\varphi}\cdot\frac{1}{a\operatorname{tg}\varphi} = -\frac{1}{a^2}. \tag{9}$$

Таким образом, заключаем, что псевдосфера есть поверхность постоянной отрицательной кривизны.

14. У к а з а н и е. Пусть a, b, c — параллельные A_1B_1 проекции вершин ΔABC на произвольную прямую PO, не параллельную прямой A_1B_1 (рис. 113). Будем иметь:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{Ob}{Oc},\quad \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{Oc}{Oa},\quad \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{Oa}{Ob}.$$

15. У к а з а н и е. Доказать, что если имеет место (1), то точки A_1, B_1, C_1 коллинеарны, можно следующим образом.

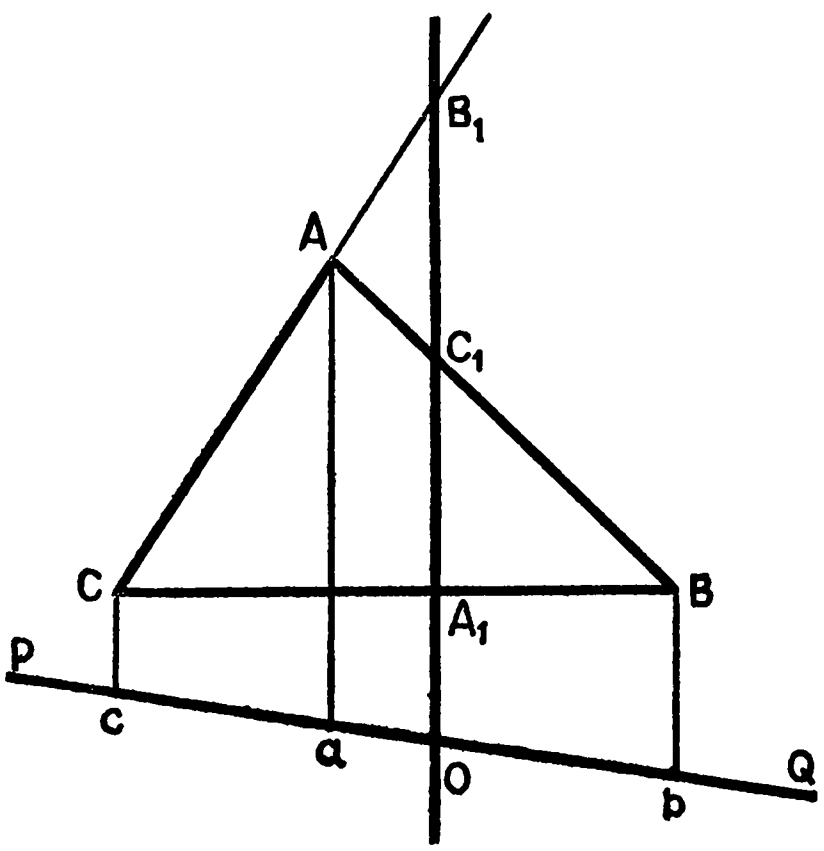


Рис. 113.

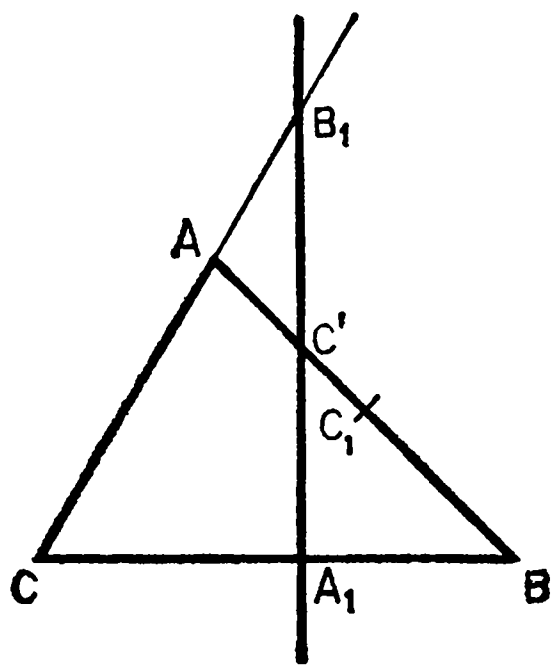


Рис. 114.

Пусть не C_1, а другая точка C' (рис. 114) является пересечением прямых AB и A_1B_1; тогда наряду с соотношением (1) по теореме Менелая имеет место также соотношение

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1. \qquad (1')$$

Отсюда вытекает, что $C' = C_1$.

16. Рассмотрим полный четырехугольник $EFGI$ (рис. 82). Стороны треугольника HCD пересекаются с прямой IE в точках E, A; по теореме Менелая имеем:

$$HE \cdot CA \cdot DI = HI \cdot CE \cdot DA. \qquad (1)$$

Если пересечь треугольник HCD прямой FE, получим:

$$HE \cdot CB \cdot DF = HF \cdot CE \cdot DB. \qquad (2)$$

Почленное деление (1) на (2) дает:

$$\frac{CA}{CB} \cdot \frac{DI}{DF} = \frac{HI}{HF} \cdot \frac{DA}{DB}. \qquad (3)$$

Аналогично, пересекая ΔHCD прямыми IG и GF, приходим к равенству

$$\frac{CA}{CB} \cdot \frac{DF}{DI} = \frac{DA}{DB} \cdot \frac{HF}{HI}. \qquad (4)$$

Перемножение равенств (3) и (4) дает:

$$\left(\frac{CA}{CB}\right)^2 = \left(\frac{DA}{DB}\right)^2. \qquad (5)$$

Откуда

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}. \qquad (6)$$

(Знак «+» перед отношением, стоящим в правой части равенства, означал бы слияние точек C и D, что заранее исключается.) Равенство (6) и говорит о том, что гармоничны четыре точки: A, B, C и D, расположенные по диагонали полного четырехугольника (см. § 21).

19. Пусть A_1, B_1, C_1 — соответственные середины сторон BC, CA и AB ΔABC. Согласно известной теореме прямые, соединяющие середины сторон треугольника, параллельны их основаниям. В данном случае

$$B_1A_1 \parallel AB,\ C_1B_1 \parallel BC,\ A_1C_1 \parallel CA,$$

иными словами, точки пересечения соответствующих прямых двух треугольников $B_1A_1C_1$ и ABC лежат на одной прямой — несобственной прямой плоскости данного треугольника. Отсюда по обратной теореме Дезарга следует, что прямые (медианы) AA_1, BB_1 и CC_1 пересекутся в одной точке.

20. Указание. Проведя $AP \parallel BK$ и $CF \parallel BK$ (рис. 115) и учитывая подобие треугольников AKP и FKC, можем писать:

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CF}{PA}. \qquad (1)$$

Аналогично получим:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BK}{FC} \qquad (2)$$

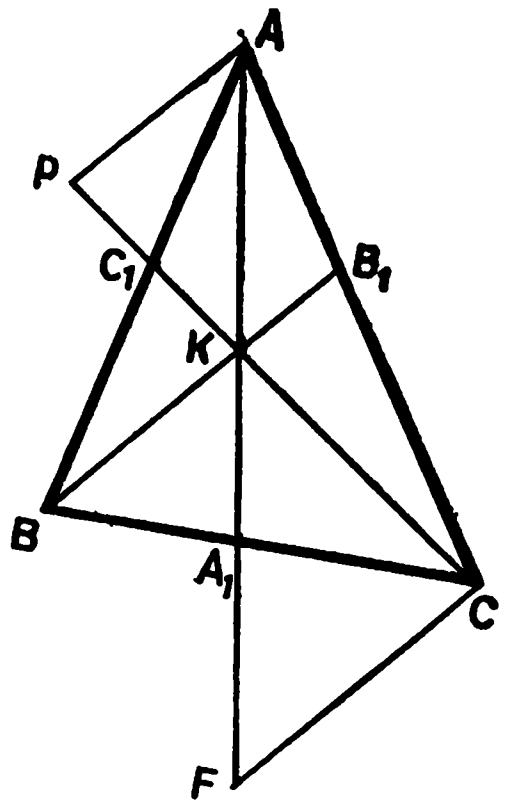


Рис. 115.

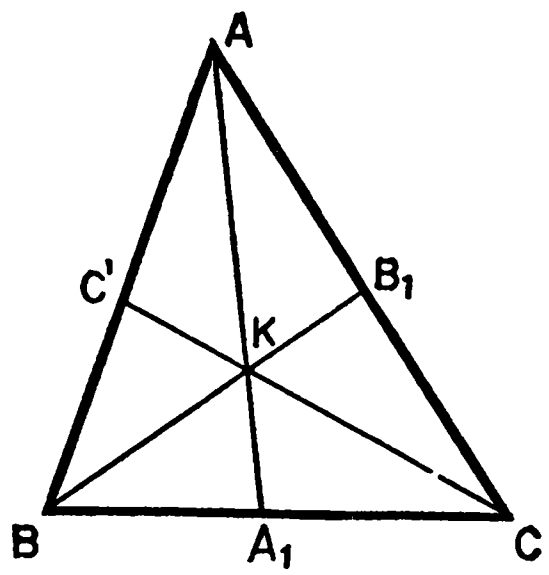


Рис. 116.

и

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AP}{KB}. \qquad (3)$$

Остается перемножить равенства (1), (2), (3).

21. Указание. Смотри решение задачи 19 (рис. 116).

22. Указание. а) Для медиан точки C_1, A_1, B_1 являются серединами сторон c, a и b ΔABC.

б) Для биссектрис по известной теореме элементарной геометрии имеем:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{b}{a}, \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{a}{c}.$$

в) Для высот имеем:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{b \cdot \cos A}{a \cdot \cos B}, \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c \cdot \cos B}{b \cdot \cos C}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{a \cdot \cos C}{c \cdot \cos A}.$$

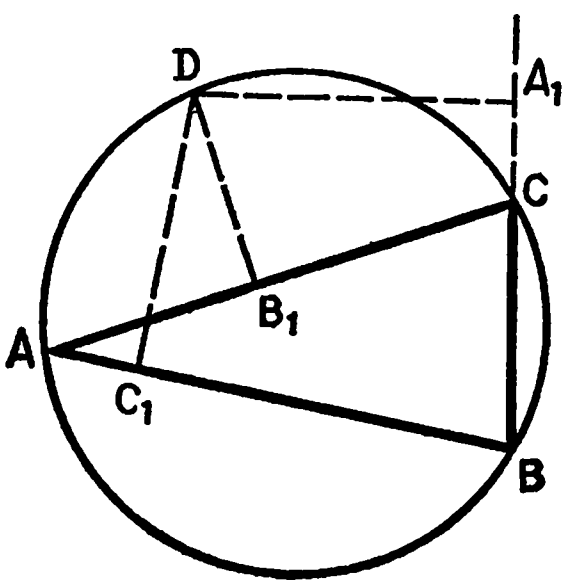


Рис. 117.

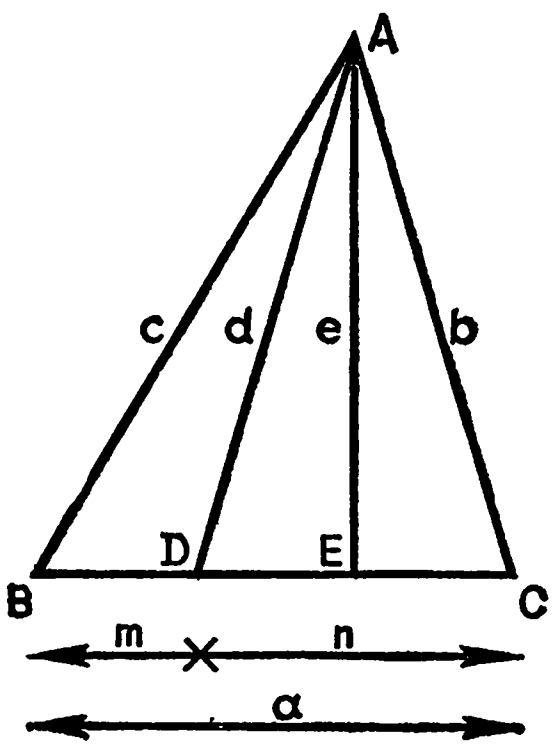


Рис. 118.

23. Указание. Пусть D — произвольная точка описанной около ΔABC окружности; $A_1B_1C_1$ — ортогональные проекции точки D на прямые BC, CA и AB (рис. 117). Укажем на два возможных доказательства: а) на основе подобия некоторых из образованных треугольников выводим соотношение (1), о котором говорится в теореме Менелая (см. задачу 18); б) сводим решение к доказательству равенства

$$\angle BA_1C_1 = \angle CA_1B_1.$$

24. Указание. Пусть AE — высота ΔABC, $DE=k$ (рис. 118). Согласно известной теореме из ΔACD имеем:

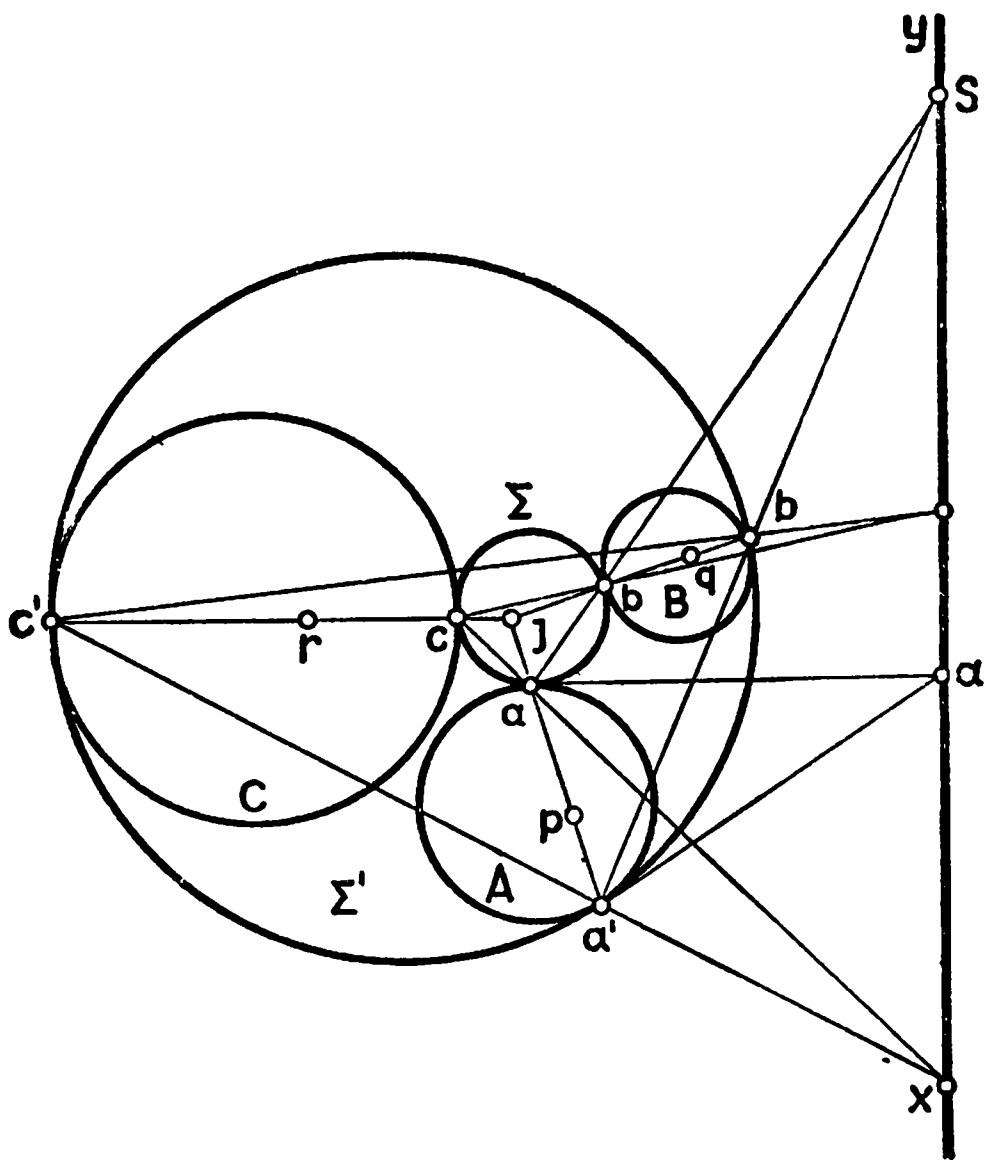


Рис. 119. Решение задачи Аполлония методом Жергонна.

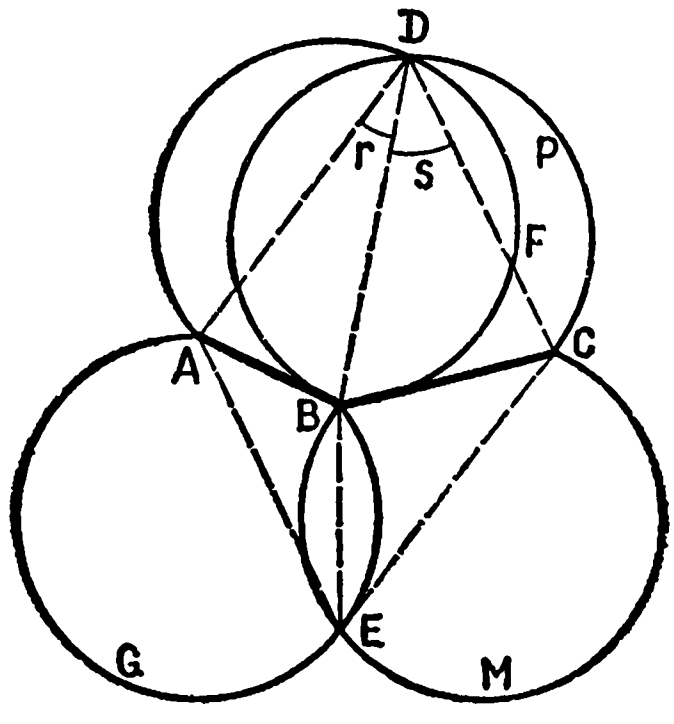


Рис. 120. Задача Потено.

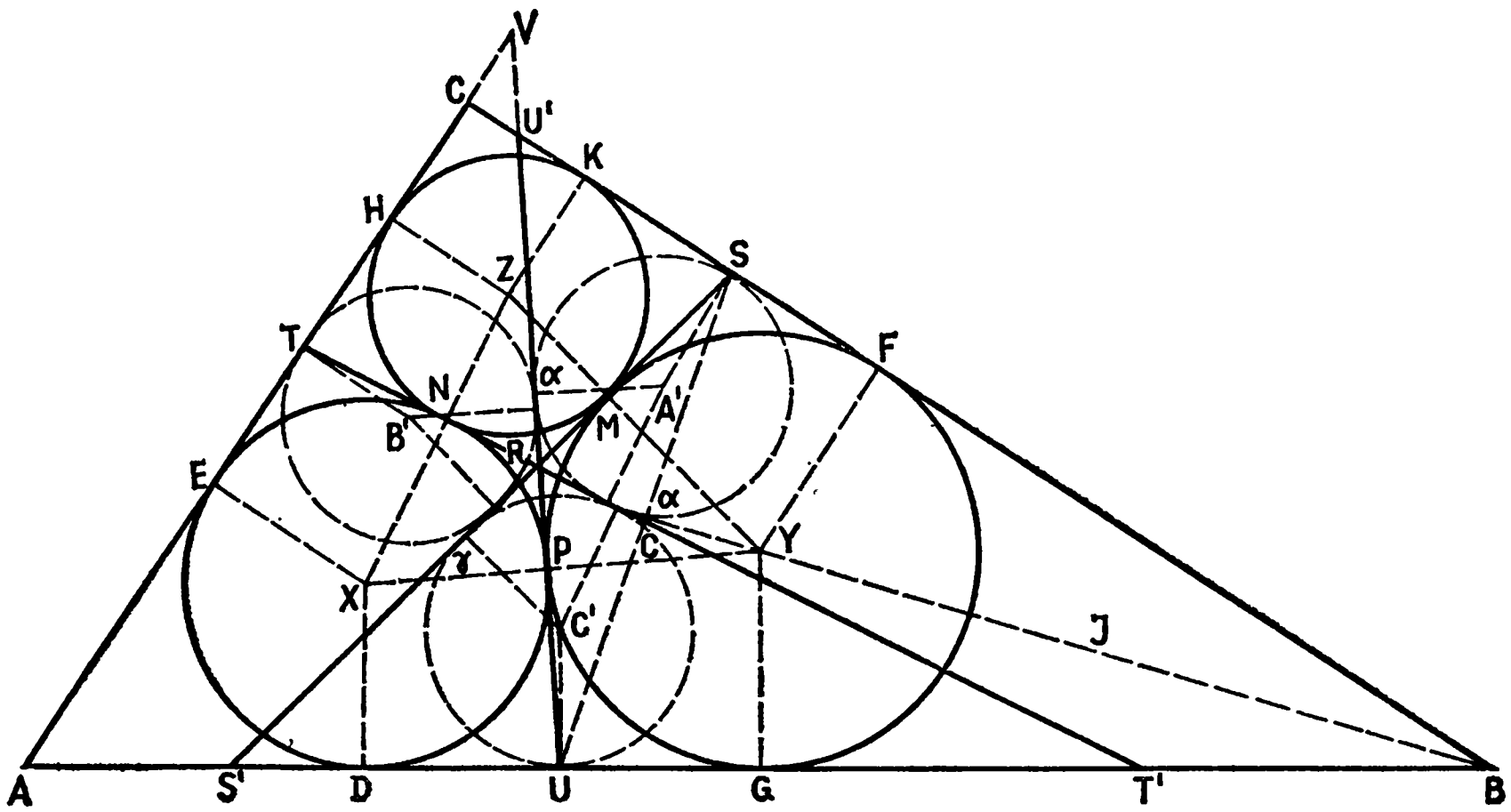


Рис. 121. Задача Мальфатти.

$$b^2 = d^2 + n^2 - 2nk, \tag{1}$$

а из ΔABD:

$$c^2 = d^2 + m^2 - 2mk. \tag{2}$$

Остается умножить члены равенства (1) на m, члены равенства (2) на n и сложить.

25. Указание. 1) Если вместо произвольной точки D возьмем середину M отрезка BC, получим для медианы m_a выражение

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2} \text{ и т. п.}$$

2) Рассматривая D как основание биссектрисы β_a угла A, получим:

$$\beta_a = \frac{2\sqrt{pbc(p-a)}}{b+c},$$

где p — полупериметр ΔABC.

26. Решение задачи Аполлония (рис. 119) можно найти, например, в кн.: Адамар Ж. Элементарная геометрия. М., 1948, ч. I, с. 210 и сл.

27. Указание. На отрезке AB по обе его стороны строим дуги окружностей $ADFB$ и $AGEB$, каждая из которых вмещает данный угол r (рис. 120). Аналогично на отрезке BC строим дуги $BDPC$ и $BEMC$, вмещающие каждая угол S. Точки D и E пересечения соответствующих дуг и представляют два решения задачи.

28. Решение задачи Мальфатти (рис. 121) изложено, например, в кн.: Адамар Ж. Элементарная геометрия. М., 1948, ч. I, с. 283 и сл.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Белл Э. Т. Творцы математики. Предшественники современной математики / Под ред. Киро С. Н. М., 1979.

Берман Г. Н. Циклоида. — 3-е изд. М. 1980.

Булгаков П. Г. Жизнь и труды Бернулли. Ташкент, 1972.

Гнеденко Б. В. Математика в современном мире. М., 1980.

Гуров С. П., Хромиенков Н. А., Чебышева К. В. П. Л. Чебышев: Пособие для учащихся. М., 1979.

История математики с древнейших времен до начала XIX столетия в трех томах / Под ред. Юшкевича А. П. М., 1970—1972, т. 1—3.

Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М., 1974.

Лаптев Б. Л. Н. И. Лобачевский. М., 1976.

Лысенко В. И. Николай Иванович Фусс. 1755—1826. М., 1975.

Оре О. Приглашение в теорию чисел. М., 1980.

Понтрягин Л. С. Метод координат. М., 1977.

Постников М. М. Теорема Ферма. М., 1978.

Реньи А. Трилогия о математике (диалоги о математике). Письма о вероятности. Дневник — Записки студента по теории информации / Под ред. и с предисл. Гнеденко Б. В. М., 1980.

Симонов Р. А. Математическая мысль Древней Руси. М., 1977.

Сираждинов С. Х., Матвиевская Г. П. Абу Райхан Беруни и его математические труды. М., 1976.

Сойер У. У. Прелюдия к математике. М., 1972.

Тихонов А. Н., Костомаров Д. П. Рассказы о прикладной математике. М., 1979.

Хинчин А. Я. Три жемчужины теории чисел. М., 1979.

Хрестоматия по истории математики/Под ред. Юшкевича А. П. М., 1975—1976, т. 1—2.

Математика в школе. Рубрики «Математический календарь» и «Ученые-математики» (с 1975 г.).

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ[1]

Абель (Nils Abel, 1802—1829) — 54, 65, 127, 141, 144, 147, 188, 189, 244
Абу-л-Вафа (Мухаммед-ал-Бузджани, 940—998) — 56, 59
Аганис (V—IV вв.) — 74
Агафарх (V в. до н. э.) — 85
Адамар (Jacques Hadamard, 1865—1963) — 223, 336
Ал-Абхари — 77
Александер (J. Alexander, род. 1888) — 304, 305
Александров А. Д. (род. 1912) — 295
Александров П. С. (род. 1896) — 38, 190, 212, 296, 304—306
Анаксагор (ок. 500—428 до н. э.) — 8, 12
Анаксимандр (ок. 610—546 до н. э.) — 11
Анаксимен (ок. 588 — ? до н. э.) — 11
Андреев К. А. (1848—1921) — 278
Андронов А. А. (1901—1952) — 248
Апиан (Petrus Apianus, 1495—1552) — 213, 215
Аполлоний Пергский (ок. 260 — ок. 170 до н. э.) — 44, 71, 94, 149, 151—*157*, 172, 180, 272, 280, 317, 336
Арбогаст (L. F. A. Arbogast, 1759—1803) — 46
Арган (Jean Robert Argand, 1768—1822) — 91, 199, 201, 202
Аристей (IV в. до н. э.) — 154
Аристотель (384—322 до н. э.) — 8, 12, 14, 40, 66, 75, 95, 151, 154, 157, 205, 284
Арнольд И. В. (1900—1948) — 10
Артин (Emil Artin, 1898—1962) — 190
Архимед (287—212 до н. э.) — 8, 14, 16—19, 26, 28—30, 42, 44, 50, 54, 60, 69, 71, 75, 94, 101, 103—107, 119, 128, 138, 149, 154, 162, 167, 168, 172, 173, 176, 178, 180—182, 231, 262, 280, 284, 313
Ашкинузе В. Г. (1927—1977) — 175
Балк М. Б. (род. 1923) — 176
Бари Н. К. (1901—1961) — 245
Барроу (Isaac Barrow, 1630—1677) — 31, 44, 106, 112, 116, 119
ал-Баттани (Мухаммед ок. 850—929) — 56
Бахмутская Э. Я. (род. 1916) — 20, 240
Башмакова И. Г. (род. 1921) — 59, 147
Безу (Etienne Bezout, 1730—1783) — 145, 168
Бейес (Th. Bayes, ум. в 1763) — 221
Бекон (Roger Bacon, ок. 1214—1294) — 30
Белл Э. Т. (Eric Temple Bell, 1883—1960) — 337
Бельтрами (Eugenio Beltrami, 1835—1900) — 258, 259, 293

[1] Указаны страницы. Курсивом набраны номера страниц, содержащих биографические сведения.

Берман Г. Н. — 328, 337
Бернулли Д. (Daniel Bernoulli, 1700—1782) — 22, 219, 222, 240, 245, 247
Бернулли И. (Johann Bernoulli, 1667—1748) — 21, 22, 47, 57, 102, 119—123, 132, 133, 144, 157, 198, 245, 284, 311, 312, 328
Бернулли Н. (Nicolaus Bernoulli, 1687—1759) — 221, 240
Бернулли Я. (Jacob Bernoulli, 1654—1705) — 54, 119—121, 132, 133, 213, 214, 220, 241, 283, 284, 311, 318
Бернштейн С. Н. (1880—1968) — 128, 223, 245, 247
Бертран Л. (Louis Bertrand, 1731—1812) — 99
Бертран Ж. (Joseph Bertrand, 1822—1900) — 310
ал-Беруни (Бируни, 973—1048) — 21, 50, 56
Бескин Н. М. (род. 1904) — 65
Бессель (F. W. Bessel, 1784—1846)— 245
Бетти (Enrico Betti, 1823—1892)— 303—306
Бине (J. Ph. M. Binet, 1786—1856)— 144, 145
Боголюбов Н. Н. (род. 1909) — 248
Болтянский В. Г. (род. 1925) — 305
Больцман (L. Boltzmann, 1844—1906) — 222
Больцано (Bernhard Bolzano, 1781—1848) — 24, 35, 36; 41, 42, 54, 65, 127, 210
Бомбелли (Rafael Bombelli, 1526—1573) — 196, 228
Борель (Emile Borel, 1871—1956) — 164, 233
Бояй (Farkas Bolyai, 1775—1856)— 81, 166, *255*, 256
Бояй Я. (Janos Bolyai, 1802—1860)— 65, 72, 81, 166, 248, *255—257*, 261
Браге Тихо (Tycho Brache, 1546—1601) — 60, 175, 309
Брадвардин (Thomas Bradwardinus, ок. 1290—1349) — 30, 205
Брауэр (Luitzen Egbertus Brouwer, 1881—1966) — 303, 304
Брианшон (Ch. J. Brianchon, 1785—1864) — 276
Бриггс (Henry Briggs, 1561—1631)— 140
Броункер (William Brouncker, 1620—1684) — 229, 238
Буняковский В. Я. (1804—1889) — 307
Бурбаки (Nicolas Bourbaki, XX в.) — 196, 205
Бхаскара (1114—1183?)—58, 213, 227
Бюрги (Jobst Burgi, 1552—1632)— 138, 139
Бюффон (Georges Louis de Buffon, 1707—1788) — 221
Бюшгенс С. С. (1882—1959) — 295
Бюэ (H. Buée, 1748—1826)—91

Вагнер В. В. (род. 1908) — 295
Валерио (Luca Valerio, 1552—1618)— 176
Валлис (John Wallis, 1616—1703)— 30, 31, 38, 39, 73, 78, 79, 106, 109, 112, 119, 136, 153, 168, 197, 202, 214, 229, 231, 237, 254, 284
Ван дер Варден (B. L. van der Waerden, род. 1903) — 190
Вандермонд (Alexandre Théophile Vandermonde, 1735—1796)—144
Вариньон (Pierre Varingnon, 1654—1722) — 242
Вейерштрасс (Karl Weierstrass, 1815—1897) — 36, 37, 127, 204
Векуа И. Н. (род. 1907) — 248
Веронезе (Giuseppe Veronese) — 67, 165, 303
Вессель (Caspar Wessel, 1745—1818) — 9, *89*—91, 201, 202
Вивиани (Vincenzo Viviani, 1622—1703) — 44, 328
Виет (François Viète, 1540—1603)— 18, 19, 57, 58, 61, 88, 136, 150, 309, 317
Вилейтнер (Heinrich Wieleitner, 1874—1931)—110, 153
Виленкин Н. Я. (род. 1920) — 205
Да Винчи (Leonardo da Vinci, 1452—1519)—85, 88, 89, 172, 174, 176, 263

Вителo (Witelo, ок. 1225—ок. 1280)—263, 267
Витрувий (Marcus Vitruvius Pollio, I в. до н. э.) — 85
Влакк (Andrien Vlacq, 1600—1667)—140
Власов А. К. (1868—1922)—87, 279
Выгодский М. Я. (1898—1965) — 177, 287

Галилей (Galileo Galilei, 1564—1642) — 29, 88, 120, 130, 149, 157, 207, 219, 311, 312, 327, 328
Галлей (Edmund Halley, 1656—1742) — 159, 221
Г'алуа (Evariste Galois, 1811—1832)—96, 148, *188*—190, 230
Гамильтон (William Rowan Hamilton, 1805—1865) — 9, 91, 92, 193, 203, 204, 257
Ганкель (Hermann Hanckel, 1839—1873) — 192
Гарнье (J. G. Garnier, 1766—1840)—150
Гаусс (Karl Friedrich Gauss, 1777—1855) — 54, 65, 81, 127, 136, 147, 193, 197, 203, 221, 257, 258, 261, 284, 288—292, 307
Гвин С. (Gwynne, ум. 1720) — 140
Гейберг (J. L. Heiberg, 1854—1928)—167
Гельмгольц (Hermann Helmholtz, 1821—1894) — 279
Гельфанд И. М. (род. 1913) — 26
Герардо Кремонский (1114—1187)—74
Гервин (P. Gerwien, I половина XIX в) — 166
Герман (Jacob Hermann, 1678—1733)—58
Герон Александрийский (I в.) — 60, 163, 176
Герсонид Лев (Леви бен Гершон, 1288—1344) — 54, 57, *78*
Гиббс (Josian Willard Gibbs, 1839—1903) — 92, 222
Гильберт (David Hilbert, 1862—1943) — 66—71, 74, 83, 166, 212, 262, 279, 307, 312
Гиппарх (ок. 180—125 до н. э.) — 55
Гиппократ Хиосский (V в. до н. э.)—18
Глейзер Г. И. (1904—1967) — 6
Гнеденко Б. В. (род. 1912) — 38, 126, 134, 187, 213, 216, 223, 337
Гольдбах (Christian Goldbach, 1690—1764) — 310
Гончаров В. Л. — (1896—1955) — 205
Граве Д. А. (1863—1939) — 54, 190
Гранди (Guido Grandi, 1671—1742)—241
Грассман (Hermann Grassmann, 1809—1877) — 91, 92, 96, 192, 204, 303, 307
Грегори (James Gregory, 1638—1675) — 118, 240
Гудде (Johann Hudde, 1628—1704)—51
Гульдин (Paul Guldin, 1577—1643)—176, 177
Гурьев С. Е. (1764?—1813) — 34
Гюйгенс (Christian Huygens, 1629—1695) — 88, 90, 112, 120, 217—220, 221, 224, 229, 283, 298, 311, 315, 328
Гюнтер Н. М. (1871—1941) — 25, 248

Давидов А. Ю. (1823—1886) — 29
Даламбер (Jean Le Rond d'Alembert, 1717—1783) — 9, 21—23, 34, 62, 123, 141, 147, 198—202, 219, 244, 245, 247, 307
Дальма (A. Dalma) — 188
Дебон (Florimont Debeaune, 1601—1652) — 153
Дедекинд (Richard Dedekind, 1831—1916) — 17, 67, 70, 210
Дезарг (Gérard Desargues, 1591—ок. 1661) — 85, 97, 157, 268, 269, 272—274, 316, 333
Декарт (René Descartes, 1596—1650) — 21, 41, 44, 88, 109, 112, 136, 142, 146, 147, 150—154, 157, 197, 201, 280, 301, 306, 311, 317, 328
Демокрит (ок. 460—380 до н. э.) — 13, 14, 29, 65, 85, 167, 179

Ден (Max Dehn, 1878—1952) — 166
Депман И. Я. (1885—1970) — 83
Дешаль (Claude Dechales, 1621—1678)
ал-Джаухари (ал-Аббас, IX в.) — 72, 73, 77
Джонсон (Johnson, XVII в.) — 19
Диностpат (IV в. до н. э.) — 28
Диофант (III в.) — 134
Дирак (P. A. M. Dirac, род. 1902) — 25
Дирихле (Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805—1859) — 24, 25, 245
Дубнов Я. С. (1887—1957) — 295
Дюпен (Charles Dupin, 1784—1873) — 287, 288
Дюрер (Albrecht Dürer, 1471—1528) — 85, 174, 263

Евдокс Книдский (ок. 406—355 до н. э.) — 14—18, 26—28, 30, 40, 88, 101, 119, 149, 167, 168, 179, 313
Евклид (365?—300? до н. э.) — 9, 15, 16, 26, 27, 42, 44, 49, 50, 60, 65—67, 69, 71—83; 88, 98—100, 119, 152, 154, 162—164, 166, 168, 171, 172, 179—184, 224, 227, 228, 248, 249, 252—254, 260—263, 273, 279, 280, 284, 293, 306
Егоров Д. Ф. (1896—1931) — 295
Есаулова Л. — 175
Ефимов Н. В. (род. 1910) — 296

Жергон (Joseph Diaz Gergonne, 1771—1859) — 202, 275
Жирар (Albert Girard, 1595—1632) — 135, *146*, 147, 197, 292, 318
Жордан (Camille Jordan, 1838—1922) — 96, 189
Жуков А. И. (род. 1923) — 294
Жуковский Н. Е. (1847—1921) — 205

Залгаллер В. А. (род. 1920) — 175
Зенон Элейский (490?—430? до н. э.) 12—15, 17

Ибн Корра (Абул-Хасан Сабит, 836—901) — 72, 73, 75, 94
Ибн Синан (X в.) — 94
Ибн ал-Хайсан (Абу Али-Хасан, 965—1039) — 74, *75*, 78, 80, 263, 308
Инфельд (Leopold Infeld) — 188

Кавальери (Bonaventura Cavalieri, ок. 1598—1647) — 29, 30, 31, 106, 107—110, 112, 119, 168, 176—178, 184
Каган В. Ф. (1869—1953) — 166, 250, 254, 259, 261, 263, 295
Каганов З. Г. — 233
Кант (Immannuel Kant, 1724—1804) — 262
Кантор (Georg Cantor, 1845—1918) — 40, 67, 205—210, 212, 261
Кантор (Moritz Cantor, 1829—1920) — 122, 262, 304
Канторович Л. В. (род. 1912) — 248
ал-Караджи Абу Бакр Мухаммеде (X—XI вв.) — 214, 308
Кардано (Hieronimo Cardano, 1501—1576) — 9, 143, 194, 195, 196, 219
Карно (Lazare Carnot, 1753—1823) — 34, 41, 90, 91, 201, 203, 274, 277, 288, 316, 317.
Катальди (Pietro Antonio Cataldi, 1548—1626) — 228
ал-Каши Гияс ад-Дин Джемшид XIV—XV вв.) — 18, 19, 57, 135, 214, 215
Келдыш М. В. (1911—1978) — 205, 248
Кеплер (Johannes Kepler, 1571—1630) — 29, 31, 40, 60, 89, 106, 107—109, 119; 138, 139, 156, 157, 168, 175, 219, 266, 267, 273, 309
Керамевс Л. — 167
Киселев А. П. (1852—1940) — 74, 99, 174
Клавиус (Christophorus Clavius, 1537—1612) — 78, 100, 164
Клайн М. — 280
Клаузиус (R. Clausius, 1822—1888) — 222
Клейн (Felix Klein, 1849—1925) — 81, 96, 97, 189, 232, 259, 260, 261, 279, 303, 307

Клеро (Alexis Claude Clairaut, 1713—1765) — 62, 95, *157*—160, 284, 306
Климов И. С. — 118
Клиффорд (William Kingdon Clifford, 1845—1879) — 248, 250
Клопский В. М. (1926—1982) — 118
Клюгель (Georg Simón Klügel, 1739—1812) — 59
Ковалевская С. В. (1850—1891)—247
Кодацци (Delfino Codazzi, 1824—1873) — 294
Коллинз (John Collins, 1625—1683)—317
Колмогоров А. Н. (род. 1903)—7, 33, 38, 53, 97, 223, 248, 279, 305, 337
Коммандино (Federigo Commandino, 1509—1575) — 176, 312
Коперник (Nicolaus Koppernikus, 1473—1543) — 150, 248, 250
Котес (или Коутс, Roger Cotes, 1682—1716) — 118, 221
Коши (Augustin Cauchy, 1789—1857) — 23, 35, 41, 46, 54, 65, 98, 99, 124, 127, 128, 141, 144, 145, 175, 188, 199, 202, 203, 243, 244, 247, 284, 307
Крамер (Gabriel Cramer, 1704—1752) — 144, 154
Крамп (Christian Kramp, 1760—1826) — 214
Крег (John Craig, 1660—1731)—119, 221
Крейн М. Г. (род. 1907) — 205, 248
Крелле (Alfred Crelle, 1780—1855)—312
Кронекер (Leopold Kronecker, 1823—1891) — 210, 211
Крылов А. Н. (1863—1945) — 32, 245
Кузин А. — 85, 87
Кулибин И. П. (1735—1818) — 85, 87
Курант (Courant Richard, 1888—1972) — 224, 302
Куратовский (Kazimierz Kuratowski, род. 1896) — 306
Курдюмов В. И. (1853—1904)—86
Курош А. Г. (1908—1971) — 190, 191, 195
Кэли (Arthur Cayley, 1821—1895)—81, 96, 97, 144, 145, 175, 204, 261, 303, 307

Лаврентьев М. А. (1900—1980) — 205, 248
Лагир (Philippe de Lahire, 1640—1718) — 273, 274, 317
Лагранж (Joseph Louis Lagrange, 1736—1813) — 22, 33, 46, 55, 62, 115, 123, *126*, 127, 144, 147, 157, 161. 188, 200, 221, 230, 243, 245, 303, 306
Лакруа (Silivestre François Lacroix, 1765—1843) — 22, 150, 154, 162
Ламберт (Johann Heinrich Lambert, 1728—1777)—19, 75, 78, 80, 142
Ланкре (M. Lancret, 1774—1807)—284
Лаплас (Pierre Simon de Laplace, 1749—1827)—126, 127, 144, 147, 221
Лаптев Г. Ф. (род. 1909) — 295
Леви (P. Levi, 1886—1971) — 223
Лежандр (Adrien Marie Legandre, 1752—1833) — 19, 29, 73, 78, 80, 98—100, 163, 164, 168, 175, 221, 312, 313, 315
Лейбниц (Gottfried Willhelm von Leibniz 1646—1716) — 19, 20, 21, 31, 32, 33, 40, 41, 44—48, 51, 52, 54, 87, 88, 90, 102, 103, 106, 108, 109, 112, 113, 116, 119—121, 124, 125, 132,—134, 141, 143, 144, 154, 157, 197, 198, 213, 238, 240, 277, 280, 284, 298, 310, 328
Лексель (Anders Johann Lexell, 1741—1784) — 292
Леонардо Пизанский (Leonardo Pisano, ок. 1180—1240)
Лемус (D. Ch. L. Lehmus, 1780—1863) — 318
Ленин В. И. (1870—1924) — 15, 101
Ли (Sophus Lie, 1842—1899) — 97, 148, 189
Линдеман (Ferdinand Lindemann, 1852—1939) — 19
Линник Ю. В. (род. 1915) — 204, 223
Листинг (Johann Benedikt Listing. 1808—1882) — 298—300

Лиувилль (Joseph Liouville, 1809—1882) — 95, 96, 189, 232
Лобачевский Н. И. (1792—1856) — 23—25, 41, 58, 65, 72, 76, 79—81, 97, 165, 168, 245, 248, 250—255, 257—262, 279, 293, 305, 307, 337
Лопиталь (Guillaume François de L'Hospital, 1661—1704) — 31, 46, 47, *120*—123, 144, 159, 328
Лоренц (Lorentz H., 1853—1928)—262
Лудольф ван Цейлен (Ludolf van Ceulen (1540—1610)—19
Лузин Н. Н. (1883—1950) — 32, 39, 124, 212, 245
Люилье (Simon L'Huilier, 1750—1840) — 175
Люстерник Л. А. (род. 1899) — 248, 295, 304, 306
Ляпунов А. М. (1857—1918) — 128, 221, 222, 247

Мавролико (Francesco Mourolico, 1494—1575) — 54
Магницкий Л. Ф. (1669—1739) — 140, 309
Майнарди (Caspare Mainardi, 1800—1879) — 294
Маклорен (Colin Maclaurin, 1698—1746) — 31, 146, 242, 243
Максвелл (James Clarc Maxwell, 1831—1879)—92, 222, 295
Мальфатти (Gianfrancesco Malfatti, 1731—1807)—318, 336
Мальцев А. И. (1909—1967) — 190
Марков А. А. (1856—1922) — 221, 222, 223, 232
Маркс Карл (1818—1883) — 29
Маркушевич А. И. (1908—1979) — 40, 96, 145, 205
Марнянский И. А. (род. 1923) — 118
Маскерони (Lorenzo Mascheroni, 1750—1800) — 71
Мачин Дж. (Machin, XVIII в.)—20
Мёбиус (August Ferdinand Möbius, 1790—1868)—91—94, 96, 269, 298, 301, 303, 311
Менелай (I—II вв.) — 292, 316, 333, 335
Менехм (IVв. до н. э.) — 154
Менье (Jean Meusnier, 1754—1793)—288, 332
Меньшов Д. Е. (род. 1892) — 212, 245
Мергелян С. Н. (род. 1928) — 205
Мере де (Méré, chevalier de) — 217
Меркатор (Gerhard Mercator, 1512—1594) — 281
Меркатор (Nicolaus Mercator, 1620—1687) — 142, 235, 237, 240
Мерсенн (Marin Mersenne, 1588—1648)—311
Меций Адриан (Adriaen Metius, 1571—1635) — 231
Микеланджело (Buanarotti Michelangelo, 1475—1564)—85, 263, 269
Миллер (J. Miller)—175
Миндинг (Ferdinand Minding, 1806—1885) — 292, 293—295
Минковский (Hermann Minkowaki, 1864—1909) — 295
Млодзеевский Б. К. (1858—1923)—294
Молин Ф. Э. (1862—1941) — 204
Молодший В. Н. (род. 1906) — 194
Мольвейде (Karl Branden Molweide, 1774—1825) — 61
Монж (Gaspard Monge, 1746—1818)—85, 86, 127, 161, 274, 284, *286*, 288, 306, 312
Морган де (A. de Morgan, 1806—1871) — 192
Мордухай-Болтовский Д. Д. (1876—1952) — 168, 170, 184
Муавр (Abraham de Moivre, 1667—1754) — 198, 199, 221, 310
Мусхелишвили Н. И. (1891—1976) — 205, 248

ал-Найризи (Абу-л-Аббас ал-Фадл, IX—X в.) — 72, *74*
Наполеон (1769—1821) — 286
Невяжский Г. Л. — 308
Нейгебауэр (Otto Neugebauer, род. 1899) — 181

Немыцкий В. В. (1900—1967) — 248
Непер (John Neper, 1550—1617)— 61, 138—140
Нетер (Emmy Noether, 1882—1935)— 190
Николá (Pierre Nicolas, 1663—1708)— 94
Нилаканта (XV—XVI вв.) — 20, 240
Новиков П. С. (1901—1975) — 212
Норден А. П. (род. 1904) — 295
Ньютон (Isaac Newton, 1643—1727)— 21, 31—34, 41, 43, 44, 46, 51, 58, 61, 94, 95, 106, 109, 112—116, 118, 119, 120, 125, 130—132, 136, 141, 143, 154, 157, 197, 214—216, 238, 239, 240, 242, 243, 317, 328

Озанам (Jacques Ozanam, 1640—1717)—311, 325
Ом (Martin Ohm, 1792—1872)—192
Оппель (Friedrich Wilhelm von Oppel, 1720—1769)—61
Орем (Nicole Oresme, 1323?—1382)— 50, 134, 205, 303
Остроградский М. В. (1801—1862)— 126, 128, 247
Оутред (William Oughtred, 1574—1660)—136, 140

Папп (III в.) — 94, 152, 172, 176, 177, 272, 273
Паскаль (Blaise Pascal, 1623—1662)— 30, 31, 54, 97, 106, 109—112, 119, 157, 213—215, 217—220, 272, 273, 276, 316, 328
Пачоли (Luca Pacioli, 1445?—1514?)— 172, 174
Паш М. (Moritz Pasch, 1843—1930)— 67, 69
Пеано (Giuseppe Peano, 1858—1932)— 10, 11, 67, 83
Пелль (John Pell, 1611—1685) — 59
Песталоцци (J. H. Pestalozzi, 1746—1827) — 276
Петерсон К. (1828—1881) — 284, 294
Петровский И. Г. (1901—1973) — 248
Пиери (Mario Pieri, 1860—1904) — 67
Пирс (Benjamin Peirce, 1809—1880)— 204
Пит (Peet) — 181
Пифагор (VI в. до н. э.) — 9, 12, 55, 88, 99, 171, 302
Платон (429—348 до н. э.) — 14, 149, 172
Плейфер (John Playfair, 1748—1819)— 72
Плюккер (Julius Plücker, 1801—1868) — 93, 303
Погорелов А. В. (род. 1919) — 296
Ползунов И. И. (1728—1766)—85, 86
Понселе (Jean Victor Ponselet, 1788—1867) — 41, 97, 274, 275, 288, 296, 317
Понтрягин Л. С (род. 1908) — 190, 248, 304, 305, 337
Попов Г. Н. (1878—1930) — 307
Посидоний (135—51 до н. э.) — 74
Постников М. М. (род. 1927) — 305
Потено (Laurent Pothenot, ум. 1732)— 317, 335
Привалов И. И. (1891—1941) — 205
Прокл (410—485) — 171
Проскуряков И. В. (род. 1910) — 10
Птолемей (II в.) — 55, 56, 58, 59, 71, 250, 263, 280
Пуанкаре (Henri Poincaré, 1854—1912) — 81, 247, 260, 261, 301, 303, 304, 307
Пуассон (Siméon Poisson, 1781—1840) — 188, 221, 247

Райт Э. (E. Wright XVII в.) — 140
Рамус (Petrus Ramus, 1515—1572) — 16, 17, 174
Рассел (Bertrand Russel, 1872—1970)—211
Рашевский П. К. (род. 1907) — 295, 330
Рафаэль (Raffaello Santi, 1483—1520) — 85, 263
Регномонтан (Joannes Regiomontanus, 1436—1476) — 57
Рекорд (Robert Recorde, 1510—1558) — 83

Риккати (Jacopo Riccati, 1676—1754) — 245
Риман (Bernhard Riemann, 1826—1866) — 76, 81, 103, 127, 245, 260, 261, 279, 293, 294, 299—301, 303, 305, 307
Роберваль (Gilles Personne de Roberval, 1602—1975) — 59, 311, 328
Роббинс Г. (Robbins Herbert) — 302
Розенфельд Б. А. (род. 1917) — 6, 21, 40, 74, 77
Рокк А. — 177
Романовский В. И. (1879—1954) — 223
Руффини (Paolo Ruffini, 1765—1822) — 188
Рынин Н. А. — 87

Савицкий Д. — 85
Саккери (Girolamo Saccheri, 1667—1733) — 75—*79*, 80
ас-Самарканди Шамс ад-Дин (XIII в.) — 77
Санкт-Винцет (Gregorius St. Vincentius, 1584—1667) — 28, 94, 235—237
Севастьянов Я. А. (1796—1849) — 86
Секи Кова Шинсуке (1642—1708) — 143, 144
Сен-Венан (A. J. Cl. Barre de Saint-Venant, 1797—1886) — 92
Серен из Антинои (IV в.) — 178
Серпинский В. (Waclaw Sierpinski, род. 1882) — 205
Сильвестер (James Joseph Sylvester, 1814—1897) — 144, 145
Симсон (Robert Simson, 1687—1768) — 78, 317
Симпликий (ум. в 549) — 12
Симпсон (Thomas Simpson, 1710—1716) — 117, *118*, 221, 240, 317
Ситников К. А. (род. 1926) — 305
ван Скоотен (Frans van Schooten, 1615—1660) — 143, 153
Славутин Е. И. — 59
Слуцкий Е. Е. (1880—1948) — 223
Слюз (René Francois de Sluse, 1622—1685) — 284
Смирнов В. И. (1887—1943) — 205, 248
Снелль (Willebrord Snellius, 1581—1626) — 60, 318
Соболев В. И. (род. 1913)
Соболев С. Л. (род. 1908) — 248, 306
Сомов И. И. (1815—1876) — 86, 92
Стевин (Simon Stevin, 1548—1620) — 89, 94, 135, 146
Стеклов В. А. (1864—1926) — 128, 247, 248
Степанов В. В. (1889—1950) — 248
Стечкин С. Б. (род. 1920) — 244
Стирлинг (James Stirling, 1692—1770) — 154
Столяр А. А. (род. 1919) — 65
Стрингхем У. — 303
Стройк Д. Я. (Struik Dirk J., род. 1894) — 219
Струве В. В. (1889—1965) — 181
Стюарт (Matthew Stewart, 1717—1785) — 99, 317
Суслин М. Я. (1894—1919) — 212

Такке (Andreas Tacquet, 1612—1660) — 31, 213
Тарталья (Niccolo Tartaglia, ок. 1500—1557) — 100, 213, 214
Тауринус — 81
Тейлор (Brook Taylor, 1685—1731) — 127, 163, 242—244
Тенсо (Ch. Tinseau, 1749—1822) — 161
Теэтет Афинский (410—369 до н. э.) — 172, 224
Тихонов А. Н. (род. 1906) — 248
Тициан (Vecelluo Tiziano, 1477—1576) — 85
Торричелли (Evangelista Torricelli, 1608—1647) — 30, 109, 110, 118, 311, 328
Трайнин Я. Л. (род. 1901) — 71
ан-Туси Насир ан-Дин Мухаммед (1201—1274) — 56, 72, 77, 78, 99, 214

Убальдо (Guido Ubaldo del Monte, 1545—1607) — 267, 273

Улугбек (1394—1449) — 18
Уоллес (W. Wallace, 1768—1843)—317
Уоррен (J. Warren, 1796—1852)—91
Урысон П. С. (1898—1924) — 304
Уэллс (Wells, 1866—1946)—303

Фархварсон А. Д. (Farguharson H., 1675—1739) — 140
Федоров Е. С. (1853—1919)—86, 190
Феодосий (I в. до н. э.) — 292
Ферма (Pierre de Fermat, 1601—1665) — 21, 31, 43, 44, 50—54, 106, 109, 110, 119, 150, 151, 153, 157, 168, 213, 214, 218, 219, 280, 306, 310, 311, 317, 328, 337
Фибоначчи (Leonardo Fibonacci, ок. 1180?—1250?) — 308
Финей (Orontius Finaeus, 1494—1555)—174
Финк (Thomas Finck, 1561—1656)—61
Фиников С. П. (1883—1964)—295
Фонтенель — 121
Фреге (Gottlob Frege, 1848—1925)—210
Френе (Frédéric Frenet, 1816—1900)—284
Фреше (Maurice Fréchet, 1878—1973)—223, 305
Фробениус (Georg Frebonius, 1849—1917)—193, 204
Фурье (Joseph Fourier, 1768—1830)—23, 58, 103, 127, 188, 247
Фусс (N. Fuss, 1755—1826)—168, 337

Хайям Омар (1048—1131) — 74, 75 79, 228
Харди (G. H. Hardy, 1877—1947)—244
Хаусдорф (Felix Hausdorff, 1868—1942)—306
Хевисайд (Oliver Heaviside, 1850—1925)—92
Хинчин А. Я. (1894—1959) — 35, 36, 38, 39, 212, 223, 232, 248, 337
ал-Хорезми Мухаммед (ок. 783 — ок. 850) — 56, 72

Цейтен (Hieronimus Georg Zeuthen, 1839—1920)—122, 177
Цингер В. Я. (1836—1907)—294
Цзу Чунчжи (428—499)—18, 231

Чаплыгин С. А. (1869—1942)—205
Чеботарев Н. Г. (1895—1947)—190
Чебышев П. Л. (1821—1894)—128, 220—223, 232, 247, 307, 337
Чева (Giovanni Ceva, 1648—1734)—79, 316
Четверухин Н. Ф. (1891—1974)—269

Шаль (Michel Chasles, 1793—1880)—93, 269, 274
Шварц (Laurent Schwarz, род. 1915)—25, 26, 307
Швейкарт (Ferdinand Schweikart, 1780—1857) — 81, 258
Швентер (Daniel Schwenter, 1585—1636)—229
Шенкс (Shanks, XIX в.)—19
Широков П. А. (1895—1944)—295
Шлёмильх О. Х. (Schlömilch, 1823—1901)—310
Шлефли Л. (Ludwig Schläfli, 1814—1895)—303
Шнирельман Л. Г. (1905—1938)—295, 304
Штаудт (Christian von Staudt, 1798—1867)—97, 276—278
Штейниц (Ernst Steinitz, 1871—1928)—190
Штейнер (Jacob Steiner, 1796—1863)—71, 97, *276*—278, 312, 316, 318, 329
Штифель (Michael Stifel, ок. 1486—1567) — 135, 138, 213, 302, 308
Шумахер (H. C. Schumacher, 1780—1850)—257
Шюке (Nicolas Chuquet, XV в.) — 135, 308

Эйлер (Loenard Euler, 1707—1783)—9, 19, 20—23. 33, 35, 41, 46, 47, 51, 52, 54, 58—60, 62, 95, 102, 123—127, 137, 141, 142, 146, 154, 159—

161, 165, 166, 175, 196—202, 216, 228, 229, 239, 242—245, 247, 284—286, 288, 292, 299, 302, 306, 308—311, 317, 318, 322, 323

Эйнштейн (Albert Einstein, 1879—1955)—294, 295

Энгельс (Friedrich Engels, 1820—1895)—29, 42, 274

Эратосфен (276—194 до н. э.)—167

Эригон (Pierre Herigone, XVIII в.)—136, 213

Эрмит (Charles Hermite, 1822—1901)—19, 142

Эсхил (525—456 до н. э.)—85

Юшкевич А. П. (род. 1906)—32, 197, 337

Якоби Б. С. (1801—1874)—144

Якоби (Carl Gustav Jacobi, 1804—1851)—127, 145

Яковкин М. В.—146

Яновская С. А. (1896—1966)—15

ОГЛАВЛЕНИЕ

От издательства 5

I. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ НА УРОКАХ.

9 КЛАСС

Глава I. Алгебра и начала анализа.

§ 1. Действительные числа. Числовые функции 8
1. Краткий обзор развития понятия числа . . . . . —
2. Аксиомы натуральных чисел 10
3. Возникновение и применение идеи бесконечности в древнегреческой математике. 11
4. История числа «пи». 17
5. Определение функции в XVIII в. 20
6. Общее определение функции в XIX в. Дальнейшее развитие понятия функции. 23
7. Идея предела в древности. Метод исчерпывания. 26
8. О методе неделимых. 29
9. Понятие предела в XVII—XVIII вв. Бесконечно малые. . . . 31
10. Понятие предела — фундамент математического анализа в XIX в. 34
11. О символе ∞ 38
12. О понятии непрерывности. 40
§ 2. Производная и ее применение. 42
13. Происхождение понятия производной. Мгновенная скорость движения. . . . . —
14. Путь к производной через касательную к кривой. 44
15. Символы и термины. 46
16. Формулы дифференцирования у Лейбница и Эйлера и дефекты в их логическом обосновании . . . . . —
17. Производная и дифференциал 48
18. Максимумы и минимумы. Об одной задаче Евклида. . . . . —
19. Максимумы и минимумы у Ферма. 50

20. Максимумы и минимумы у Лейбница и Эйлера. 51
21. Математическая индукция. 53
§ 3. Тригонометрические функции. 55
22. Краткий обзор развития тригонометрии. . . . . —
23. Теоремы сложения. Тригонометрические функции суммы и разности аргументов. 58
24. Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента. Формулы преобразования. 59
25. Теорема тангенсов, формулы площади треугольника и некоторые другие формулы. 60
26. Дифференциальное уравнение свободного гармонического колебания. Теория дифференциальных уравнений в XVIII в. . . 62

Глава II. Геометрия.

§ 4. Основные понятия стереометрии. Параллельность в пространстве. 65
27. Основные понятия в геометрии Евклида и в современной геометрии. . . . . —
28. Аксиомы в «Началах» Евклида. 66
29. «Основания геометрии» Гильберта и сущность аксиоматического метода. 68
30. Учение о параллельных в средние века. 71
31. Открытие неевклидовой геометрии. 78
32. Старые и современные обозначения и символы в геометрии. . . 83
33. Изображения пространственных фигур. Из истории начертательной геометрии. 84
§ 5. Преобразования пространства. Векторы. 87
34. Геометрические исчисления в Древней Греции. . . . . —
35. Исчисление отрезков в XVII—XVIII вв. 88
36. Пути развития векторного исчисления. 89
37. Геометрические преобразования. 93
§ 6. Перпендикулярность в пространстве. Многогранные углы. 98
38. Перпендикулярность прямой к плоскости у Евклида, Коши и Лежандра. . . . . —
39. Теорема о трех перпендикулярах. 99
40. Двугранные и многогранные углы. 100

10 КЛАСС

Глава III. Алгебра и начала анализа.

§ 7. Первообразная и интеграл. 101
41. Происхождение понятия определенного интеграла. . . . . —
42. Инфинитезимальные методы Архимеда. 103
43. От Архимеда к Кеплеру и Кавальери. 106
44. От Кавальери до Ньютона и Лейбница. 109
45. «О глубокой геометрии» Лейбница. 112
46. «Метод флюксий» Ньютона. Понятие неопределенного интеграла. 113

47. Приближенное вычисление интегралов. Формул Симпсона . . . 117
48. Г. Ф. Лопиталь и его «Анализ бесконечно малых». 119
49. Дифференциальное и интегральное исчисление в трудах Эйлера и других ученых XVIII—XIX вв. 123
50. Некоторые задачи, приводящие к понятию об обыкновенном дифференциальном уравнении. 128
51. Геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными в школе Лейбница. 132
§ 8. Показательная, логарифмическая и степенная функции. . . . 134
52. Обобщение понятия степени . . . . . —
53. Логарифмическая функция. Число *e*. 137
§ 9. Системы уравнений. Основная теорема алгебры. 142
54. Линейная алгебра. Системы уравнений. . . . . —
55. Об Этьене Безу и его теореме. 145
56. Об основной теореме алгебры. 146
57. От классической алгебры к современной. 147

Глава IV. Геометрия.

§ 10. Координатный метод в пространстве. 149
58. От элементарной к аналитической геометрии. . . . . —
59. Система координат и начала аналитической геометрии у Ферма. 150
60. Задача Паппа и декартовы координаты 152
61. Аполлоний и его конические сечения. 154
62. Идея пространственных координат до Эйлера. 157
63. Аналитическая геометрия в пространстве в трудах Эйлера, его современников и последователей. 160
§ 11. Многогранники. 162
64. Призма и пирамида. . . . . —
65. Симметрия в пространстве. 163
66. Планиметрические понятия и предложения, их стереометрические аналоги. «Геометрия» Лобачевского и метод фузионизма. 164
67. «Теорема Эйлера» о многогранниках. 165
68. Объемы многогранников. Теорема Дена — Кагана. 166
69. Из истории вычисления объема пирамиды. 167
70. Об одной усеченной пирамиде в Московском папирусе. . . . 169
71. О правильных многогранниках. 171
§ 12. Фигуры вращения. 176
72. Тела и поверхности вращения. Центр тяжести и теоремы Паппа — Гульдина. . . . . —
73. Цилиндр и цилиндрические поверхности. 178
74 Конус и конические поверхности. 179
75. Об одной древнеегипетской криволинейной поверхности. 180
76. Шар и сферическая поверхность у Евклида и Архимеда. 181
77. Объем шара и принцип Кавальери. 184

II. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ НА ВНЕКЛАССНЫХ ЗАНЯТИЯХ.

Глава V. Алгебра и начала анализа.

§ 13. О развитии современной алгебры. 188
1. О понятии группы. Эварист Галуа. . . . . —
2. О понятиях кольца и поля. Абстрактная алгебра. 190
3. От множества натуральных чисел к множеству комплексных чисел. Путь формально-логического расширения понятия числа. 192
§ 14. Комплексные числа и многочлены. 193
4. Происхождение понятия комплексного числа. Его развитие в XVI—XVII вв. . . . . —
5. Комплексные числа в XVIII в. Формула Муавра. Труды Даламбера и Эйлера. 198
6. Геометрическое истолкование комплексных чисел в XIX в. 201
§ 15. Из истории возникновения и развития теории множеств. . . 205
§ 16. Элементы комбинаторики и понятие вероятности. 213
7. Основные понятия комбинаторики. Термины и символы. . . . —
8. Формула бинома Ньютона. Дальнейшее развитие комбинаторики. 214
9. Понятие вероятности и зарождение науки о закономерностях случайных явлений. 216
10. Краткий обзор дальнейшего развития теории вероятностей. 220
§ 17. Из истории непрерывных дробей 224
§ 18. Ряды. 233
§ 19. Краткий обзор дальнейшего развития теории дифференциальных уравнений. 245

Глава VI. Геометрия.

§ 20. Из истории неевклидовой геометрии. 248
§ 21. Как возникла и развивалась проективная геометрия. 263
§ 22. Теория поверхностей. Из истории дифференциальной геометрии. 280
§ 23. Развитие топологии. Обобщение понятия геометрического пространства. 296

Глава VII. Исторические задачи.

§ 24. Алгебра и начала анализа. 307
§ 25. Геометрия. 311
§ 26. Ответы, указания, решения 319
Рекомендуемая литература 337
Именной указатель 338

Замеченные опечатки в предшествующих выпусках книги «История математики в школе»

Страница	Строка	Следует читать
		Для IV—VI классов
5	11 снизу	11, 35; VI класс — пункты 26, 29, глава 7, § 7. Помимо то-
105	3 снизу	$y = \dfrac{\dfrac{30 \cdot 190}{7} + 30 \cdot 330}{30 - \dfrac{190}{7}} = 3750.$
233	2 сверху	Витрувий П. (I в. до н. э.) 90
		Для VII—VIII классов
153	7; 6 снизу	В разных областях высшей математики работало и работает в настоящее время немало женщин-математиков. Среди них: в Италии —
156	4 сверху	математических наук Екатерина Логвиновна
178	Подпись к рис. 57	Ющенко-Рвачева Пять правильных многогранников

Герш Исакович Глейзер

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ. IX—X КЛАССЫ

Спец. редактор А. А. Свечников. Редактор Э. К. Викулина. Художник М. К. Шевцов. Художественный редактор Е. Н. Карасик. Технический редактор Н. Н. Бажанова. Корректор К. А. Иванова

ИБ № 7107

Сдано в набор 26.06.82. Подписано к печати 17.03.83. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. типограф. № 3. Гарнит. лит. Печать высокая. Усл. печ. л. 22+форз. 0,25. Усл. кр.-отт. 23,75. Уч.-изд. л. 23,04+форз. 0,44. Тираж 200 000 экз. Зак. 1302. Цена 80 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.

Школьные учебники СССР

sheba.spb.ru/shkola